DEFINIBILITÀ E PARADOSSI

Come la definibilità è diventata un argomento matematico (da Richard a Gödel)

(*Gabriele Lolli*)

La definibilità è oggi uno dei settori in cui si può dividere la logica (accanto alla imostrabilità e alla semantica, in una possibile catalogazione degli argomenti e delle roblematiche); vi rientrano la ricorsività classica delle gerarchie come la ricorsività generalizzata, la teoria descrittiva degli insiemi e le sue intersezioni con i predetti argomenti; sotto altro nome (il che è un significativo residuo della vicenda sotto narrata, il nome continua a disturbare), è presente però anche in informatica, nello studio matematico dei linguaggi, nell'argomento dei linguaggi formali, in tutta la sua ricca articolazione, vuoi i linguaggi di programmazione, vuoi le grammatiche in generale.

L'introduzione della definibilità com argomento matematico è importante perché rientra in una tendenza di generalizzazioni che ha cambiato la natura della matematica: è la modifica di impostazione che porta dalla soluzione delle equazioni allo studio della risolubilità in sé, dalle definizioni allo studio della definibilità, dai calcoli allo studio della calcolabilità. La nuova visione si realizza non con continuità, ma con salti cruciali, come quello legato alla vicenda della definibilità. La calcolabilità è collegata a questa, e si introduce sulla sua scia, in modo meno drammatico e contestato (quella della risolubilità è indipendente e precedente).

L'episodio storico che ha legittimato l'accettazione della teoria matematica dei linguaggi è stata la dimostrazione del primo teorema di incompletezza di Gödel, e questo è il vero importante lascito del teorema di incompletezza nella storia e trasformazione della matematica; il risultato in sé e la sofisticata, impressionante tecnica matematica dell'aritmetizzazione, sviluppata e applicata in tutti i calcoli relativi, non permettevano più di storcere il naso; ma la vita era stata dura per il concetto di definibilità, che è stato l'argomento che portato a questi sviluppi, nel periodo che va dall'inizio del secolo a Gödel. C'erano ragionamenti sull'orlo della contraddizione su un concetto e con tecniche non ben definite: Gödel con la sua dimostrazione ha realizzato un duplice risultato: ha precisato oggetto e tecniche relative e ha usato, ed esaltato, quel tipo di argomenti pericolosi in modo positivo.

Quando è stato usato all'inizio il concetto di definibilità, è stato rifiutato come non matematico, in particolare da Peano e Zermelo. Peano è l'autore della dichiarazione che «exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad linguistica», osservazione piuttosto strana per un autore che, a parte i suoi interessi e la sua inclinazione linguistica ha proprio messo le basi di una teoria algebrica delle grammatiche; Zermelo sarcasticamente rilevava le contraddizioni a cui dava luogo, si dimostrava tutto e il contrario di tutto. Non veramente contraddizioni, ma risultati tra loro contraddittori ottenuti da diversi autori che avevano un uso e un concetto diverso della nozione (König, Berstein, Richard ottengono - o dicono di poter ottenere - diversi e contrapposti risultati sul continuo).

Questo non ha impedito ovviamente che il concetto emergesse da diverse parti, anche indipendentemente dalle antinomie, in connessione ad esempio con l'assioma di scelta; le *Cinq Lettres* scambiate tra analisti francesi sono rivelatrici; ivi ci si rende conto benissimo che limitarsi agli enti definibili significa restringersi a universi numerabili (terminologia successiva ovviamente), e tuttavia il più che numerabile a molti appare un incubo da evitare; aleggia la questione se tra i definibili valga la scelta (questione poi trattata anche da Richard), si cerca di capire la differenza tra nominare e dimostrare (che si ritrova anche in altri, in altra terminologia, ad esempio Bernstein), che precisa la contrapposizione tra dimostrazioni costruttive e di esistenza; Lebesgue si pone esplicitamente il problema se sia possibile *nommer* un buon ordine del continuo (problema risolto solo molto tempo dopo, non può essere Δ^1_2).

La definibilità è nascosta anche nel concetto stesso zermeliano di *definit*, che per ironia doveva bandire dalla teoria degli insiemi il concetto di definibilità. Zermelo si è interessato direttamente o indirettamente della questione in due occasioni, nel secondo lavoro sull'assioma di scelta e in quello sulla assiomatizzazione della teoria degli insiemi. Nel nuovo lavoro del 1908 sull'assioma di scelta discute le obiezioni al suo precedente articolo del 1904 e altri lavori intervenuti nel frattempo. In particolare parla di König, nella nota 11 e osserva ivi che König cerca di usare l'antinomia di Richard per dirimere il problema del continuo (dimostrando che il continuo non è un aleph, perché non bene ordinabile). Ma «"finitamente definibile" non è una nozione assoluta, ma solo relativa, e dipende dal linguaggio, o dalla notazione scelte. La conclusione che tutti gli oggetti finitamente definibili devono essere un'infinità numerabile vale solo se uno ed un solo sistema di segni è usato per tutti, e la questione se un singolo individuo può o non avere una designazione finita è in sé senza significato, perché a ogni oggetto noi potremmo, se necessario, assegnare in modo arbitrario una qualunque designazione. Che il continuo possa essere bene ordinato, per inciso, non ha molto più a che fare con questa antinomia più di quello che può avere un qualunque proposizione; tutte possono essere ugualmente provate e refutate a partire da una contraddizione. Infatti, è proprio per mezzo della definibilità finita che Felix Bernstein una volta (1905) voleva provare che il continuo è equivalente alla seconda classe di numeri, e quindi a un insieme ben ordinato; così, partendo dalla stessa nozione di König, arrivava alla conclusione opposta. Naturalmente, la promessa realizzazione di questa "dimostrazione" non fu mai pubblicata».

Ricordiamo che König prima (congresso Heidelberg, 1904) aveva annunciato una dimostrazione basata su una errata interpretazione di una disuguaglianza di Bernstein, poi nel 1905 aveva invece presentato un'altra osservazione in base al concetto di definibilità, sembra in modo indipendente ma contemporaneo, forse anzi anticipando nei tempi Richard. Considera gli elementi definibili del continuo e quindi, essendo questi numerabili ed avendo un sup, tale sup che è definibile (non è chiaro se pensa che i definibili formino un segmento oppure prenda appunto il sup dell'unione); non sembra turbato dalla ovvia osservazione che per rendere corretto il ragionamento bisognerebbe come minimo che il buon ordine fosse definibile); una variante è quella di considerare gli ordinali numerabili associati ai buoni ordini numerabili definibili (cioè ai sottinsiemi numerabili dei naturali, oa lle successioni di 0 e 1), e quindi il primo ordinale non definibile.

Richard introduce l'antidiagonale, che in verità è dovuta a Cantor nella sua dimostrazione della non numerabilità del continuo.

Data la matrice infinita

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

l’antidiagonale è: $1 - a(n, n)$.

La definizione dell’antidiagonale sembra del tutto legittima, in quanto eseguita con operazioni aritmetiche sulla matrice; in realtà la matrice è individuata con il concetto di definibilità, quindi c’è una confluenza di due domini, una specie di mostro tipo Golem. Se l’antidiagonale di Cantor dimostra la non numerabilità del continuo, l’antidiagonale di Richard che cosa dimostra? Lui stesso non ha le idee chiare.

Richard non riteneva la sua una vera contraddizione, in quanto lui stesso la risolveva dicendo che la definizione dell’antidiagonale nel punto in cui era non aveva significato: se fosse stata una riga q-esima, al momento di metterla nella enumerazione si sarebbe già dovuto conoscere tutta la matrice. La sua osservazione sarà accolta e sviluppata da Russell e Poincaré come una confutazione delle definizioni impredicative.

Richard accenna anche a una eventuale stratificazione in livelli dei definibili (quelli che usano la nozione di definibilità del primo livello e così via iterando).

Anche König aveva parlato di definizioni pseudo-finite, e pseudo-pseudo-finite e così via, includendovi quella dell’antidiagonale. Bernstein pensava probabilmente, proprio aggiungendo gli elementi definiti alla Richard per diagonalizzazione, che le definizioni fossero aleph$_1$, in un certo senso anticipa l’idea che nel 1925 Hilbert tenterà di sviluppare iterando operatori.

Secondo Zermelo, quando propone l’assiomatizzazione e la formulazione dell’assioma si separazione, «una questione o asserzione è detta *definit* se le relazioni fondamentali del dominio, per mezzo degli assiomi e delle leggi universalmente valide della logica determinano senza arbitrarietà se essa vale o no». Il risultato è che, dal punto di vista dell’assiomatizzazione zermeliana, tutti i criteri come “definibile con un numero finito di parole”, quindi ”antinomia di Richard” e “paradosso della denotazione finita” svaniscono. Così, diranno altri, concetti come gli insiemi rossi. L’esclusione delle antinomie si realizza naturalmente ogni volta provando il carattere *definit* della proprietà usata.

Una parte importante della storia è quella che riguarda il fatto che nella costruzione di modelli l'iterazione delle operazioni, per essere dominata richiede una fissazione preventiva della totalità delle proprietà definite - non basta ogni volta che capita verificare il carattere definito - che deve essere realizzata perciò in modo globale e inevitabilmente dipendente dal linguaggio della teoria degli insiemi, quindi in modo relativo; siccome il linguaggio fissato è comunque numerabile si ottiene così il paradosso di Skolem; Zermelo rifiuta questa relatività ritenendo che la logica del secondo ordine individui solo i modelli pieni, a differenza di quella del primo ordine. L'ultima polemica sull'argomento tra Skolem e Zermelo si svolge nel 1929-30, ma subito dopo Zermelo dovrà rivolgersi alla forma che la questione assume nel risultato di Gödel (uso di mezzi linguistici e dimostrativi ristretti).

E' vero che non c'era ancora, e si stava precisando, con Weyl e Skolem, il concetto di linguaggio del primo ordine; ma è anche vero che dal punto di vista teorico il concetto di linguaggio e sistema formale, nella impostazione che aveva dato Hilbert fin dal 1904, era capito benissimo, come si vede in Finsler. Era per esempio ovvio che le dimostrazioni formali potessero essere enumerate; anche Richard aveva pensato di enumerare le dimostrazioni, nel suo libro. Forse però questa era l'unica operazione che si pensava di fare (ancorché fosse implicita almeno la possibilità di leggere l'ultima riga di una dimostrazione). Mancava una chiara idea di altre manipolazioni più specifiche su queste strutture.

Con Gödel vengono ad assumere un carattere positivo e rimessi all'onor del mondo, sia scientifico che culturale, proprio il tipo di argomenti paradossali a cui questo concetto si prestava. Il punto di partenza può essere quella nota dell'introduzione dove Gödel osserva che, come quella del mentitore, tutte le antinomie epistemologiche possono essere usate per ottenere il risultato di incompletezza: «l'analogia di questa argomentazione con l'antinomia di Richard salta agli occhi. Anche con "il mentitore" sussiste una stretta affinità... abbiamo una proposizione, la quale afferma la propria indimostrabilità» (notare che Gödel si richiama prima a Richard e solo dopo al mentitore); e in nota: «In generale tutte le antinomie epistemologiche possono essere sfruttate per una simile dimostrazione di indecidibilità».

Ramsey aveva chiaramente distinto due gruppi di antinomie che altri mettevano tutte assieme (ad esempio Russell, per cui tutte dipendevano dall'impredicatività), uno che includeva quelle sui cardinali e ordinali, e un gruppo B in cui sono citate il mentitore, Berry, Richard, Weyl su eterologico e il più piccolo ordinale indefinible (König?). «Le contraddizioni del gruppo B non sono puramente logiche e non possono venire enunciate in soli termini logici; poiché tutte contengono qualche riferimento al pensiero, al linguaggio o al simbolismo, che non sono termini formali ma empirici. Così esse potrebbero esser attribuibili non a una logica o a una matematica errate, ma ad idee errate sul pensiero e sul linguaggio... [sarebbero rilevanti per la logica nel senso di analisi del pensiero]». L'unica soluzione data finora è quella di Russell che attribuiva le contraddizioni a una cattiva logica. «Spetta agli oppositori di questa tesi di mostrare chiaramente il difetto in quella che Peano chiamava linguistica ma che io preferirei chiamare epistemologia e a cui sono dovute queste contraddizioni».

E' curioso tuttavia che Gödel citi prima Richard e dopo "il mentitore"; di solito è questa l'antinomia a cui si associa la sua dimostrazione (con la sostituzione del dimostrabile al vero); ma l'analogia con Richard non salta immediatamente agli occhi.

van Heijenoort ha presentato una possibile formalizzazione dell'argomento dell'incompletezza in un contesto richardiano. La matrice di Gödel sarebbe:

$$a(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se la proposizione che si ottiene sostituendo il gödeliano del numerale } \underline{m} \text{ nella n-esima formula è dimostrabile} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora

$$a(q, n) = 1 - a(n, n)$$

non è possibile, l’antidiagonale di una qualunque matrice non è una riga della matrice; mentre se si considera la matrice

$$b(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se.... è vera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si può avere

$$b(q, n) = 1 - a(n, n)$$

con $a(q, q) = 0$ e $b(q, q) = 1$, q essendo [il gödeliano della] proposizione vera ma indimostrabile.

Gödel veramente ha considerato una situazione che si può far corrispondere alla seguente matrice dove compare anche il segno di “indefinito”:

$$a(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se la proposizione che si ottiene sostituendo il gödeliano numerale } \underline{m} \text{ nella n-esima formula è dimostrabile} \\ 0 & \text{se la negazione della proposizione... è dimostrabile} \\ | & \text{altrimenti (| sta per indefinito).} \end{cases}$$

Qui non c'è contraddizione nell'ammettere che l'antidiagonale sia una riga, perché si avrebbe

$$a(q, n) = 1 - a(n, n)$$

e

$$a(q, q) = 1 - a(q, q)$$

che non è una contraddizione ma è possibile con $a(q, q) = |$, e quindi q gödeliano di una proposizione che è indimostrabile con anche la sua negazione. La differenza rispetto all'antinomia è che qui il compito della dimostrazione sta proprio nel provare che l'antidiagonale è una riga, trovando la formula che la definisce, e che sarà la q-esima.

Questa versione della dimostrazione è una ricostruzione, ma c'è un antecedente della dimostrazione di incompletezza che è impostata in questa ottica della definibilità è quello di Finsler; il suo argomento è stato da lui presentato proprio nello stesso formato di quello richardiano.

Finsler (1926) si colloca, polemicamente, in un contesto hilbertiano di dimostrazioni strettamente formalizzate. Il suo problema è, si può dire, di respingere il programma di Hilbert mostrando che la consistenza formale non assicura l'assenza di contraddizioni.

Finsler immagina un sistema finito di simboli, con un ordine alfabetico, e regole grammaticali che individuano l'insieme G delle parole, disambiguate (se più di un significato, diverse parole, quindi questo presuppone che il significato si possa decidere); un oggetto è finitamente definibile se c'è una di queste parole del sistema G che lo determina.

Prima ripresenta l'antinomia di Richard. La totalità delle successioni binarie (infinite) che sono finitamente definibili è numerabile, con l'ordine lessicografico. La successione antidiagonale non è finitamente definibile, c'è sì una stringa di simboli e di parole che è la frase che sembra descrivere l'antidiagonale, ma l'oggetto corrispondente non può essere caratterizzato in modo non ambiguo, e quindi non esiste un oggetto (successione) che soddisfa quella stringa. «La definizione data tuttavia diventa non rifiutabile quando la trasferiamo dal dominio formale a quello reale, e astraiamo del formale. Allora essa definisce in verità una successione che non è finitamente definibile per mezzo del sistema G».

Non è chiaro se con questo intende dire la stessa cosa che diceva Richard, sulla possibilità di una stratificazione.

Finsler definisce poi "dimostrazione formale", e che una proposizione è formalmente indecidibile se non è possibile alcuna prova formale né per essa né per la sua contraddittoria.

«Ora si considerino tutte le combinazioni di segni del sistema G che costituiscono una dimostrazione formale del fatto che in una certa successione binaria il numero 0 occorre infinite volte, oppure in alternativa che non occorre infinite volte. Allora ad ogni tale dimostrazione è associata una successione binaria determinata in modo non ambiguo, quella a cui si riferisce la dimostrazione. Ci possono essere, tuttavia, diverse dimostrazioni del genere per la stessa successione. Una successione numerabile di queste dimostrazioni può essere stabilita per mezzo dell'ordine definito in G...; allora le successioni binarie associate formano una successione numerabile. Ora si prenda l'antidiagonale associata a questa successione e si costruisca la proposizione: Nella successione antidiagonale appena definita il numero 0 non occorre infinite volte [facile esercizio]. Questa proposizione è formalmente indecidibile...», ma falsa.

Di nuovo, secondo Finsler la dimostrazione è legittima quando trasferita al dominio concettuale, tralasciando quello formale.

Si dice di solito che il difetto dell'argomento di Finsler, un semplice schizzo, è nella natura del puramente concettuale. Il rilievo è stato fatto da Gödel sia nella prima furibonda reazione, quando Finsler gli fa notare il suo lavoro del 1926 che Gödel non conosceva (ma da dove prende l'analogia con Richard) per ciò che pretende di dimostrare - una sorta di indimostrabilità assoluta formale - sia nella più pacata valutazione del 1970. L'osservazione è in parte vera (Finsler diceva che la prova di Gödel - quella con cui stabilisce la verità della proposizione indecidibile - era ancora formale, e aveva ragione, ma allora anche la sua). Ma il vero difetto sta nel non aver sviluppato a sufficienza il formale.

Per mettere a posto l'argomento occorre definire alcune operazioni sintattiche cruciali, ma anche, con il senno di poi, del tutto matematiche:
mettere in ordine parole secondo lunghezza (e questo era fatto), ma anche e soprattutto estrarre da una parola quello che occorre all'i-esimo posto, eseguire sostituzioni di entità linguistiche in certi posti delle parole, e altre operazioni analoghe. Con queste operazioni precisate nel loro carattere ricorsivo primitivo e dimostrabilmente rappresentabili, la definizione di sopra della a(n, m) diventa possibile e aritmetica con una esplicita formula; ma lo stesso diventerebbe la definizione della matrice utilizzata da Finsler, che usa più o meno lo stesso tipo di operazioni sintattiche.

Certo senza aritmetizzazione mancano i numeri, e questo dà ancora, in quel tempo, disagio. Si potrebbe anche dire che non si è capaci ancora di ragionare matematicamente bene senza l'ancoraggio dei numeri, se è vero che Gödel stesso, nella sua presentazione informale nell'introduzione, fa qualche pasticcio. Dopo, i numeri si abbandonano e ci si rende conto che le operazioni sintattiche sono matematiche anche se non agiscono su numeri (confluiscono qui l'insiemistica da una parte e l'assiomatizzazione dall'altra, ovvero la scoperta dagli algebristi inglesi che non importano gli oggetti, come i numeri, ma solo alcune leggi delle operazioni sui numeri). Attraverso l'aritmetizzazione Gödel può sfruttare le definizioni per ricorsione primitiva (che non erano poi state legittimate da tanto, da Dedekind, ma) che erano legittime definizioni aritmetiche; e può accumulare una base di queste funzioni aritmetiche che anche indipendentemente dall'uso sintattico vengono a costituire un interessante, matematicamente, sottinsieme di funzioni; e queste funzioni pongono problemi matematici, ad esempio di codifica, di riduzione di un tipo di definizione ad altri, che sono in sé rilevanti. Sarebbe stato difficile di brutto passare a quello che oggi si può fare, cioè ricorsione primitiva su liste qualunque, per ricorsione sulla lunghezza, sarebbe stato un salto nell'astratto un po' forte, che non avviene mai.

Tuttavia non ci va molto a rendersi conto che le strutture linguistiche non sono strutture numeriche ma strutture con numeri convenzionali come oggetti; i numeri sono codici di altri enti, sono associati ai dati primari; anzi usare i numeri è più complicato, anche perché, come diremmo oggi, la metateoria viene a coincidere con la teoria e quindi ogni singola proposizione viene ad avere ambiguamente due significati a seconda del livello a cui la si legge (ma questo è del tutto irrilevante ai fini della trattazione, anche se qualcuno può vedervi qualcosa di misterioso e magico, e teoria e metateoria possono essere diverse, pure se entrambe matematiche, ad esempio aritmetica e teoria degli insiemi).

Oggi nella teoria dei linguaggi si ritrovano, come risultati sui programmi, versioni dei paradossi tipo Berry (ma anche gli stessi risultati classici di indecibilità). Anche qui abbiamo da una parte programmi che sono testi di un linguaggio, e ad essi sono accostati numeri, che sono i codici (magari in binario, quindi successioni di 0 e 1, ma numeri); e tuttavia l'aritmetica di quei numeri non è rilevante (eventualmente questioni riguardanti la complessità, che però ha a che fare con la lunghezza delle parole numerali).

Per vedere come anche altre antinomie, se non tutte, si prestino alla dimostrazione di incompletezza, cosideriamo quella di Berry (il minimo numero che non può essere definito con meno di ventotto sillabe); essa è stata dapprima precisata da B. Levi in questo modo:

si chiami B il numero di segni che servono a comporre le nostre frasi (inclusi i segni matematici, come | per l'esponenziale);
si può assumere:

$$B > 40, \qquad \beta \text{ cifre nel sistema decimale } (\beta = 2)$$

Si consideri:

$$\text{il numero di posto } B \mid B$$

$$20 + 2\beta \quad \text{segni}$$

quindi:

$$\text{posto di "il numero di posto } B \mid B\text{"} < B \mid (20 + 2\beta) < B \mid B.$$

Lo stesso argomento si ritrova ad esempio nel seguente problema di *ottimizzazione:* per ogni intero *n*, trovare un programma minimale che stampa *n* e si ferma.

Ma:

non esiste alcun programma **P** che per ogni input *n* dà come output, **P**(*n*), un programma equivalente minimale,

sotto queste assunzioni:

(i) dato un programma, è definita e possiamo effettivamente trovare la sua lunghezza
(ii) ci sono solo un numero finito di programmi di ogni lunghezza fissata
(iii) numeri rappresentati in qualche base maggiore o uguale a 2

Si può facilmente scrivere un programma $\mathbf{Q}_m$ tale che

$\mathbf{Q}_m$ stampa un intero *i* e si ferma se e solo se nessun programma di lunghezza minore di *m* stampa *i*, e *i* è il più piccolo per cui succede.

Si ha

$$\begin{aligned} &\text{lunghezza di } \mathbf{Q}_m = \text{c} + \text{lunghezza di “}m\text{”} \\ &\text{lunghezza di } \mathbf{Q}_m \leq \text{c} + 1 + \log m \\ &\text{lunghezza di } \mathbf{Q}_m < m \end{aligned}$$

e quindi:

> $\mathbf{Q}_m$ stampa il più piccolo intero che richiede un programma di lunghezza almeno *m* per stamparlo, ma $\mathbf{Q}_m$ stesso ha lunghezza minore di *m*

L'argomento di Levi si trova anche nella versione di Boolos del risultato di incompletezza:
M sia una procedura che produce solo proposizioni vere dell'aritmetica; diciamo che

$$\text{F(x) definisce n}$$
$$\text{se } M \mid\!- \ F(x) / x = \underline{n}$$

Scriviamo poi (o meglio, non scriviamo, ma immaginiamo di scrivere le formule seguenti indicate a sinistra che abbiano il significato indicato a destra; torniamo al livello di informalità che c'era in Finsler, sapendo però che quello che diciamo è una formula dell'aritmetica lo è veramente):

C(x, z)	x definito da formula con z simboli
B(x, y)	x definito da qualche formula con meno di y simboli
A(x, y)	x è il più piccolo numero non definito da alcuna formula con meno di y simboli

Sia

k numero di simboli di A,

e

H(x) x è il più piccolo numero
non definito da alcuna formula con meno di 10k simboli.

Allora

H(x) contiene $2k + 24 < 10k$ simboli.

Se n è il più piccolo numero non definito da alcuna formula con meno di 10k simboli, allora

n non può essere definito da H(x),

ma

$H(x) / x = \underline{n}$

L'argomento è basato su descrizioni compatte, più brevi di ciò che definiscono; con varianti, si ritrova anche nei lavori di Chaitin.

L'impressione è che negli anni venti ci fosse questo tipo di argomentazione al limite dell'antinomia, ma corretta in sé ed elegante, sfiziosa, che sembrava dovesse rivelare qualcosa di importante, ma che non si sapeva cosa, non si poteva fissare in modo preciso cosa si voleva dimostrare e come. Oltre a non sapere come evitare le contraddizioni che ovviamente erano da evitare. Gödel sviluppa sia la parte *hard* sia la parte *soft*, e il suo esempio mostra come morale generale che entrambe sono necessarie (non solo nel progresso della matematica, ma anche per ogni singolo individuo nella sua preparazione e nel suo avviamento alla ricerca).

Bibliografia

G. Boolos, A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem, *Notices AMS* **36** (1989), . 4, pp. 388-90.

G. J. Chaitin, *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, New York, 1987.

G. Lolli, Il concetto di definibilità nella discussione sui fondamenti dell'inizio del secolo, *Atti del Convegno di Storia della Logica* (Pavia, 1972), Liviana, Padova, 1974, pp. 227-36.

G. Lolli, Da Zermelo a Zermelo, in *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna, 1985, cap. 7, pp. 175-239.

G. Lolli, *Incompletezza. Saggio su Kurt Gödel*, Il Mulino, Bologna, 1992.

M. Machtey, P. Young, *An Introduction to the General Theory of Algorithms*, Elsevier, New York, 1978.

J. Myhill, Some Philosophical Implications of Mathematical Logic, *The Review of Metaphysics* **6** (1950), n. 2, pp. 165-98.

F. P. Ramsey, I fondamenti della matematica (1925), in *I fondamenti della matematica e altri scritti di logica* (1931), Feltrinelli, Milano, 1964, pp. 17-78.

J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge Mass., 1967.