Recensione:

John Burgess, *Fixing Frege*, 2005

di

Carlo Penco

penco@unige.it

2R – Rivista di Recensioni Filosofiche – Volume 9, 2008

Sito Web Italiano per la Filosofia

www.swif.uniba.it/lei/2r

John Burgess, *Fixing Frege*, Princeton, 2005, 272pp, $39.95

1. Introduzione: Il Neologicismo

Quando ho scelto di recensire questo libro speravo che mi aiutasse a fissare le principali idee di Frege (dal titolo). Sbagliato, per mia ignoranza. Il libro è una rassegna, e valutazione dal punto di vista tecnico, dei diversi tentativi "neologicisti" di porre rimedio ai difetti del programma fregeano. Chi cerca una discussione filosofica su Frege e su temi di filosofia del linguaggio contemporanea, farà bene a cercare altrove[1]. Inoltre, anche solo come presentazione filosofica del problema del neologicismo, il testo lascia a desiderare,[2] perché si concentra esclusivamente sugli aspetti matematici e sulla valutazione della consistenza delle teorie. Ma su questo aspetto pare davvero un ottimo lavoro, perché riunisce una serie di risultati sparsi su diverse riviste e spesso troppo tecnici per essere divulgati alla vasta nicchia di persone che apprezzano i tentativi neologicisti. Mi sono rassegnato quindi a mantenere l'impegno, anche se non sono un esperto in filosofia della matematica, confrontando anche alcune altre recensioni uscite nel frattempo[3]. Prendiamo dunque il libro per per quello che è: chi è interessata a vedere messi in buon ordine i diversi tentativi di neologicismo, saltando un po' di dettagli tecnici e andando al sodo, pur avendo indicazioni essenziali sui problemi formali irrisolti? Bene, questo libro fa per lei.

Dopo il paradosso di Russell, il logicismo di Frege, è stato generalmente abbandonato, lasciando a poco a poco emergere Frege come innovatore in logica,

[1] Ad esempio ai bei libri di T.Burge, *Truth, Thought, Reason: Essays on Frege*, Oxford University Press, 2005, xii + 419 e M. Sainsbury, *Departing from Frege*, Routledge, London 2002, oltre che ai quattro volumi di M. Beaney e E. H. Reck, Gottlob Frege; *Critical Assessments of Leading Philosophers*, Routledge 2005-2006.
[2] Per questo sarebbe meglio allora leggere F. McBride, F. "Speaking with shadows: A study of neo-logicism", *British Journal for the Philosophy of Science*, 54:103-163.
[3] In particolare la recensione di Timothy Bays 2006 e di Linnebo 2005.

epistemologia e in filosofia del linguaggio, e mettendo in disparte i suoi apporti in filosofia della matematica (nonostante alcuni libri ad essa dedicati tra cui lo stesso Dummett, *Frege, Philosophy of mathematics*). Il paradosso di Russell si appoggia sul V assioma dei Principi dell'Aritmetica di Frege:

$$(V)\ \forall F\ \forall G\ [Est(F) = Est(G) \Leftrightarrow \forall x\ (Fx \leftrightarrow Gx)]$$

In parole semplici, due concetti hanno la stessa estensione se e solo se sotto i due concetti cadono gli stessi oggetti (se i concetti sono materialmente equivalenti). Da questo assioma - indirettamente, e più direttamente da una qualche forma del principio di comprensione - deriva la contraddizione di Russell. Burgess analizza ampiamente i tentativi di Russell per mantenere il logicismo (34-46) mostrando le loro debolezze che hanno fatto sì che i matematici alla fine abbiano preferito adottare come framework per la matematica non la teoria russelliana dei tipi, bensì la teoria assiomatica degli insiemi.

Ma, sostengono i neologicisti, un'altro mondo è possibile. Mentre l'assioma V è necessario per definire cosa sia un concetto, Frege non aveva bisogno dell'assioma in alcuna sua forma per lo sviluppo dell'aritmetica nel suo sistema logico. Come mostra Burgess alle pp. 23-26, per questo basta il principio di Hume, per cui il numero degli F è uguale al numero dei G se gli oggetti che cadono sotto il concetto F possono essere posti in corrispondenza biunivoca con gli oggetti che cadono sotto il concetto G:

$$(PH)\ \forall F\ \forall G\ [Num\ (F) = Num\ (G) \equiv F \Leftrightarrow G]$$

(dove"$\equiv$" sta per "se e solo se" e "$F \Leftrightarrow G$" sta per "c'è una corrispondenza biunivoca tra F e G").

Distinguere il ruolo del V assioma e il ruolo del principio di Hume nella riduzione della matematica a logica aiuta a sviluppare il progetto originale fregeano evitando il paradosso di Russell: di fatto si può derivare l'aritmentica dalla logica del secondo ordine più il principio di Hume. Questo risultato viene discusso a più riprese da Burgess, che ricorda (pp. 147-148) che venne anticipato in diversi modi da Paul Geach nel 1951 ("Frege's Grundlagen", *Philosophical Review*, 60: 535-544) e da Charles Parsons ("Frege's theory of number", in M.Black, *Philosophy in America*, Cornell, Ithaca: 180-203). Ma è stato Crispin Wright, in *Frege's Conception of Number as Objects* (1983) a influenzare lo sviluppo recente dei vari tentativi neologicisti che si sono sviluppati a partire dagli anni '80, producendo sistemi "fregeani" liberi dal paradosso, con l'obiettivo di ridurre quanta matematica possibile a logica. La derivazione dell'aritmetica di Peano dalla logica del secondo ordine più il principio di Hume è normalmente nota come "teorema di Frege" (almeno a partire da Boolos, che ha molto insistito su questa via per liberare Frege dalla contraddizione).

Il libro è divisto in tre parti: (1) la parte introduttiva ove Burgess presenta la sua terminologia illustrando le tesi di fondo di Frege e Russell e definendo l'obiettivo del suo lavoro: valutare le teorie neologiciste sullo sfondo di una gerarchia di teorie per misurare la forza matematica delle diverse proposte neologiciste; (2) l'analisi delle teorie predicative, con particolare riferimento al lavoro di Richard Heck e A. P. Hazen; (3) l'analisi delle teorie impredicative con particolare riferimento ai lavori di Crispin Wright, di Kit Fine e di George Boolos. Seguo grossomodo questa scansione

2. La Strategia Politica di Burgess

Il libro non si propone di essere una "Introduzione" a Frege e la veloce rivisitazione delle idee fregeane di fondo è chiara e sintetica - per chi già conosce Frege. Poco utile come introduzione, dal libro non ci si deve nemmeno aspettare accuratezza storica o esegetica, in quanto Burgess dà una sua propria notazione semplificata che aiuta a confrontare le diverse riformulazioni del sistema fregeano (pp. 23-24)[4].

Dopo la presentazione del sistema fregeano, un rapido cenno alla contraddizione di Russell nella sua forma del 1903, una breve discussione del tentativo fregeano per risolvere il paradosso (la famosa "Frege's way out") e della soluzione di Russell con la teoria dei tipi ramificata, Burgess si concentra sul fatto che *due* aspetti del sistema fregeano contribuiscono *assieme* a creare la contraddizione: (i) l'assunzione dell'esistenza di *concetti senza restrizioni*, che permette di introdurre il concetto di non appartenere a se stesso: "x:x≠x"; (ii) l'assunzione dell'esistenza delle *estensioni dei concetti senza restrizioni*, che permette l'introduzione dell'*insieme* di insiemi che non appartengono a se stessi {x: x≠x}. Le teorie neologiciste sono classificabili a seconda che cerchino di bloccare il primo o il secondo aspetto, come strada verso il paradosso, e questo aiuta a classificare e organizzare la presentazione del testo. Le *teorie predicative*, rifiutando predicati che si riferiscano alla totalità di cui fanno parte, bloccano (i); si ammette la formula $x \notin x$, ma non si permette che determini un concetto. Le *teorie non predicative*, pur accettando l'assioma di comprensione non ristretto che permette predicati che fanno riferimento alla totalità di cui fanno parte, bloccano (ii) perché bloccano il passo per cui esiste una estensione per ogni concetto.

[4] La notazione di Burgess mi pare piuttosto idiosincratica. Nell'appendice vi sono diverse utili tabelle riassuntive. Sarebbe forse stata utile anche una tabella riuassuntiva delle sue proprie convenzioni notazionali.

Burgess distingue inoltre un neofregeanismo "in senso ampio" e "in senso stretto", cioè il progetto di sviluppare modificazioni noncontraddittorie del sistema di Frege (Boolos, Heck, Kit Fine), e il progetto di sviluppare sistemi con lo scopo che aveva Frege, cioé con lo scopo di stabilire che gran parte della matematica ha uno status epistemologico determinato, di derivazione esclusivamente logica (Crispin Wright e la sua scuola).

L'obiettivo principale del libro – oltre a quello di dare una presentazione chiara dei problemi filosofici (soprattutto pp. 75-85) – è verificare quanta parte della matematica possa essere sviluppata in questi sistemi, secondo un metodo molto semplice. Il metodo è il seguente: una teoria matematica è più potente di un'altra se la seconda può essere interpretata nella prima. Occorre dunque avere una gerarchia di teorie matematiche sulla base della quale verificare la potenza di un sistema neologicista, verificanto quale parte della gerarchia può essere interpretata in ciascun sistema. La gerarchia di Burgess parte dalle teorie dell'aritmetica del primo ordine, in particolare dall'aritmetica di Robinson (Q), che è il sistema più debole, per passare all'aritmetica di Peano al primo ordine (che aggiunge al sistema Q lo schema di assiomi di induzione matematica), e altri sistemi di aritmetica per poi passare all'aritmetica di second'ordine e di ordini superiori e infine a teorie degli insiemi, di diversa potenze fino al sistema Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta di cardinali indescrivibili (tavola riassuntiva a pagg.220-221). La presentazione sintetica di Burgess dipende soprattutto da lezioni inedite di Friedman e da altri testi standard sui tre livelli della serie fondamentale di sistemi matematici (aritmetica, analisi, teoria degli insiemi).

3. DUMMETT E LE TEORIE PREDICATIVE

La parte seconda del libro è una presentazione delle risposte a una sfida lanciata da Dummett ne suo volume sopracitato *Frege, filosofia della matematica.* Qui Dummett sostiene, in una tradizione che è ormai minoritaria, che la fonte del problema in Frege è l'ammissione del principio di comprensione non predicativo. Il principio di comprensione, origine diretta del paradosso di Russell, dice che:

$$\exists F \forall x (Fx \equiv \phi(x))$$

in sintesi il principio permette di costruire concetti data una qualsiasi formula o proprietà[5].

L'idea dunque è non permettere formule che quantificano su tutti i concetti. Di fatto, abbandonando il principio di comprensione il sistema di Frege non è più contraddittorio (come ha mostrato Parsons 1987). Boolos ha però sostenuto che questo non giustifica la tesi di Dummett; il problema è piuttosto vedere quanta matematica può essere realizzata in un sistema predicativo *alla* Frege. Questa sfida è stata accettata da Richard Heck 1996 che ha trovato che il sistema di aritmetica di Robinson si può interpretare in una *versione predicativa* del sistema di Frege. Burgess presenta un altro risultato che mostra che gli assiomi dell'aritmetica di Robinson si possono dedurre in una logica del second'ordine dal principio di Hume e da definizioni accorte di nozioni matematiche. Burgess nota inoltre che teorie come il sistema di Quine (*New Fondations*)

[5] Anche Russell 1903 utilizza un assioma della teoria fregeana degli insiemi che si può presentare come una applicazione del principio di comprensione. Ora il principio si può presentare con diverse formulazioni, da quella sintetica di Dummett o Burgess a presentazioni più esplicitamente legate alla teoria degli insiemi come la formula seguente: $z \in \{x: \phi(x)\} \leftrightarrow \phi(z)$. Dal principio di comprensione in questa forma si deriva direttamente la contraddizione di Russell (vedi p.32 di Burgess).

e analoghi sistemi di Hao Wang sono non-Fregeani perché accettano un assioma di infinito come faceva Russell. La dimostrazione più rilevante nel contesto delle teorie predicative è forse la dimostrazione di noncontradditorietà della logica predicativa ramificata del secondo ordine avente come assioma il V principio di Frege (o la legge di Hume). La dimostrazione è fatta da Heck, anche se dimostrazioni di frammenti di aritmetica superiori all'aritmetica di Robinson sono tentati con tecniche modellistiche più sofisticate da Ferrera-Wehmeier. La presentazione di Burgess è stringata e difficile da seguire per i non iniziati, ma se letta con attenzione è un affascinante viaggio nei tentativi più disparati di salvare il logicismo. Ma quello che si salva non va molto più in là dei primi gradini della gerarchia, e è dubbio che chi lavora in questo progetto attenda diottenere risultati che vadano al di là della riducibilità a logica della teoria dei numeri naturali o di una qualche versione dell'aritmetica elementare. Per questo la parte più rilevante del lavoro riguarda le teorie impredicative, quelle cioé che accettano una qualche forma del principio di comprensione.

4. Le Teorie Impredicative: Quanta Matematica Fregeana

Ho già accennato al ruolo di Crispin Wright (e ai risultati anticipatorii di Geach e Parsons). Il lavoro di Wright è il più famoso esempio di teorie impredicative, teorie cioé che accettano di quantificare su qualsiasi concetto senza restrizioni, dando però restrizioni a cosa considerare estensioni dei concetti. Burgess introduce così quella che viene oggi chiamata "*aritmetica di Frege*", cioé derivazione dell'aritmetica svolta in una teoria non contraddittoria di logica del second'ordine con il principio di Hume come assioma aggiunto.

Dato che in questo tipo di teorie la restrizione sull'esistenza delle estensioni dei concetti viene controbilanciata da assunzioni sull'esistenza di "astratti" con tipi di equivalenza tra concetti differente dalla coestensività, tali teorici vengono solitamente chiamati "astrazionisti". Principi di astrazione sono infatti quei principi che introducono oggetti astratti tramite relazioni di equivalenza tra concetti (come il princpio di Hume che introduce numeri come astrazione dalla relazione di corrispondenza biunivoca tra concetti o come l'assioma V di Frege che introduce le estensioni come astrazioni dalla relazione di applicarsi agli stesso oggetti. Ma, come mostra l'assioma V, vi sono principi di astrazione "buoni" e "cattivi". Boolos inoltre ha mostrato che vi sono principi di astrazione che sono singolarmente consistenti con i vari sistemi, ma assieme provocano contraddizione (la cosiddetta "obiezione della cattiva compagnia"); vi sono inoltre principi di per sè consistenti con i sistemi, ma inconsistenti assieme al principio di Hume. Insomma, i neologicisti hanno bisogno di cercare dei metodi per distinguere i principi di astrazione per dimostrare quali di questi sono buoni e possono essere utilizzati nei nostri sistemi logici (come appunto si può fare con il principio di Hume). Burgess analizza i tentativi in questo senso, partendo dalla teoria generale dell'astrazione di Kit Fine, che si può considerare come un tentativo di rispondere alla obiezione delle "cattive compagnie". Segue la presentazione di una serie di approcci astrazionisti alla teoria degli insiemi e con un confronto tra logica del secondo ordine e versioni della teoria degli insiemi ispirate a Frege. "Ispirate a Frege" vuol dire ovviamente che sostengono una concezione "logica" di insieme come estensione di concetti (e non la più comune concezione iterativa di insieme). Conclude con una caratterizzazione del sistema di teoria degli insieme necessario per avere una corrispondenza tra le nozioni di validità di secondo ordine standard (traskiana) e intuitiva.

Le dimostrazioni sono presentate da Burgess in modo conciso e quasi sempre chiaro, per chi ha pazienza di leggere, e utile per chi già conosce i singoli risultati in quanto questi sono inseriti in un quadro generale che finora mancava. In Italia, peraltro, vi sono diversi atteggiamenti sul senso di fondo del progetto logicista; ad esempio Lolli 1987 pare avere un atteggiamento liberale sugli aspetti di fondo del logicismo, atteggiamento rafforzato dall'idea di meccanizzazione della logica e dei successi della deduzione automatica; Cellucci al contrario è decisamente negativo e cerca di mostrare l'inconsistenza delle proposte neologiciste, sbarazzandosi forse un po' velocemente delle proposte di Wright e Hale[6]. Nonostante le numerose critiche, i sistemi neologicisti sembrano comunque essere in ottima forma e promettere nuovi sviluppi. Burgess, che sta *de facto* dalla parte di Cellucci, al termine del suo lavoro, tenta una confutazione del neologicismo dal punto di vista "grammaticale". E' la sua critica al progetto in generale che si basa sull'idea fregeana per cui tutto ciò che può essere denotato da un termine singolare è un oggetto; quindi il concetto "è un cavallo" non può essere denotato da alcun termine singolare, nemmeno da "il concetto denotato da 'è un cavallo'". Burgess accenna alla soluzione di Boolos sulla quantificazione plurale[7], che assume le locuzioni plurali come primite e intellegibili prima di teorie di concetti o classi o insiemi. Ma assumento il

[6] vedi Lolli 1987; Cellucci, 2007 in *Introduzione alla filosofia della matematica* (Laterza 2007), si disfa un po' frettolosamente della posizione di Crispin Wright, criticandolo per non aver dimostrato la noncontradditorietà del suo sistema. D'altra parte la noncontradditorietà del sistema di Wright viene dimostrata indipendentemente in Burgess 1984, Hodes 1984 (v. anche Hazen 1985), e alcuni anni dopo da Boolos e Heck (in Boolos 1998 pp.315.338) e in Heck 1993. Cellucci purtroppo non discute questi lavori, anche se richiama i dubbi dello stesso Boolos (vedi Cellucci, pp. 84).

[7] Il richiamo a Boolos 1984 è rilevante e costituisce una possibile via d'uscita al problema di Frege; ma la trattazione di Burgess qui è un po' sommaria; ed elude ogni altro tentativo di soluzione del problema del concetto cavallo, come ad es. quella formita da Dummett 1973 (e ridiscussa recentemente da Davidson 2005, cap. 6.

punto di vista di Boolos – che si applica alla logica di second'ordine con predicati monadici – gran parte delle teorie trattate non più adeguate, e l'unica che resterebbe sarebbe quella che Burgess chiama "*Fregenized Bernays set Theory*" (p.196), che si basa su alcune idee di Bernays. In questa teoria però ben poco resta di fregeano, e molto più di Cantor (e della versione di limitazione di grandezza degli insiemi incorporata nella teoria). Infatti alla fine Burgess mostra tutto il suo scetticismo e rende il suo lavoro, come egli stesso suggerisce, una fatica di Sisifo!

Strana fatica davvero dedicare un intero libro a un progetto che si ritiene dubbio; perhcè questa fatica? L'idea di fondo, credo, sia qualcos del genere: il neologicismo non funziona e non funzionerà mai; ma resta un residuo di Frege in teorie del second'ordine alla Bernays trasformate con i suggerimenti di Boolos, e cioè l'idea che "la relazione di un insieme con le cose di cui è insieme, prese collettivamente, è prioritatia sulla relazione dell'insieme con ciascuna di queste cose prese individualmente". Resta uno spiraglio di apertura di idee Fregeane verso un nuovo insieme di teorie, su cui lo stesso Burgess sta lavorando (vedi Burgess 2004 e Linnebo 2007).

Come accenato all'inizio, il libro complessivamente utile per il lavoro di dettaglio su ogni teoria proposta, anche se conclude che tutte o quasi queste teorie non raggiungono o non possono raggiungere lo scopo per cui sono state elaborate. Il testo non è comunque di facile lettura e richiede una certa pazienza; alcune parti espositive sono comunque molto chiare, e non si ritroverebbero in alcun testo di logica pura. Una persona più favorevolmente disposta a affrontare la strada del neologicismo potrebbe comunque trovare più utile partire da una introduzione e rassegna generale, come quella fatta da McBride (2003) o il lavoro a carattere più filosofico di Zalta e Linsky 2006, o anche leggere qualche teorico che ha un maggiore entusiasmo per un progetto in cui crede, come qualcosa dalla raccolta di Hale-Wright 2001.

Chi invece non nutre particolare interesse per il neologicismo negli aspetti più tecnici potrebbe essere interessato alla discussione filosofica. Qui Burgess, come detto, va piuttosto velocemente, ma non inutilmente. E nota che una delle questioni decisive è se le definizioni fregeane o neofregeane di "numero naturale" sono da intendersi come "ermeneutiche" o "rivluzionarie" (per usare una terminologia oggi di moda). Il problema è cioé se vogliano individuare la vera natura del numero naturale e della matematica, o vogliano invece dare una ricostruzione razionale del concetto di numero (per usare una terminologia non più di moda). Entrambe le strade hanno i pro e i contra, ma in ogni caso ogni valutazione del neologicismo deve avere ben chiaro quale delle due ipotesi sorreggono i progetti in corso.

CARLO PENCO

BIBLIOGRAFIA

Bays T. (2006) "Review of John Burgess, Fixing Frege", in *Notre Dame Philosophical Reviews.*

Beaney M. e Reck, E. H. (2006). *Gottlob Frege; Critical Assessments of Leading Philosophers*, (4 volumi) Routledge.

Boolos, G. (1984). "To Be is to B the Value of a Variable (or Some Values of Some Variables)", in Journal of Philosophy, 81 (430-50) e in Boolos 1998.

Boolos, G. (1998). *Logic, Logic, Logic*, Harvard, Cambridge U.P.

Boolos, G. and Heck, R. (1998). "Die Grundlagen der Arithmetik § § 82-83". In Boolos, G., 1988.

Burge T. (2005). *Truth, Thought, Reason; Essays on Frege*, Clarendon Press, Oxford.

Burgess, J. (1984). "Review of [Wright, 1983]". *Philosophical Review*, 93:638-40.

Burgess, J. P. (2004). "E Pluribus Unum: Plural Logic and Set Theory". *Philosophia Mathematica*, 12(3):193–221

Cellucci C. (2007). *La filosofia della matematica del Novecento*. Laterza, Roma-Bari, 2007.

Dummett M. (1971) *Frege, Philosophy of Language*. Duckworth, London, 1973 (tr.it. a c. di C. Penco, Marietti, Genova, 1983).

Dummett M. (1991). *Frege, Philosophy of Mathematics*. Harvard U.P.

Geach, P. (1951). "Frege's Grundlagen". *Philosophical Review*, 60:535-544.

Geach, P. (1955). "Class and concept". *Philosophical Review*, 64:561-570.

Hale, B. and Wright, C. (2001). *The Reason's Proper Study*. Oxford, Oxford.

Hazen, A. (1985). "Review of [Wright, 1983]". *Australasian Journal of Philosophy*, 63:251-254.

Heck, R. (1993). "The development of arithmetic in Frege's Grundgeetze der Arithmetic". *The Journal of Symbolic Logic*, 58:579-601.

Hodes, H. (1984). "Logicism and the ontological commitments of arithmetic". *The Journal of Philosophy*, 81:123-149.

Linnebo Ø. (2006). "Mending the Master: review of John Burgess, Fixing Frege", in *Philosophia Mathematica*, vol 14, n. 3, 338-400.

Linnebo Ø. (2007). 'Burgess on Plural Logic and Set Theory', Philosophia Mathematica 15(1): 79-93.

McBride, F. (2003). "Speaking with shadows: A study of neo-logicism". *British Journal for the Philosophy of Science*, 54:103-163.

Parsons, C. (1965). "Frege's theory of number" In Black, M., editor, *Philosophy in America*, pages 180-203. Cornell, Ithaca.

Sainsbury, M. (2002). *Departing from Frege, Essays in the Philosophy of language*. Routledge, London, 2002.

Wright, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, Aberdeen.

E. Zalta, B. Linsky (2006). What is Neologicism? *in The Bulletin of Symbolic Logic*, 12/1: 60–99.