

Recensione:

**Stewart Shapiro, *The Oxford Handbook of
Philosophy of Mathematics and Logic*, 2005**

di

Miriam Franchella

miriam.franchella@unimi.it



2R – Rivista di Recensioni Filosofiche – Volume 6, 2007

Sito Web Italiano per la Filosofia

www.swif.uniba.it/lei/2r

Recensione di S. Shapiro (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005, pp. 856, £ 85,00

Si tratta di un volume ponderoso, in cui il curatore, professore di filosofia all'Ohio State University, si propone di far presentare i grandi temi della filosofia della matematica del XX-XXI secolo e gli aspetti della logica da essi toccati e stimolati, cercando di presentare questioni filosofiche, critiche, difese, questioni "tecniche". La distribuzione del materiale non è omogenea nei vari capitoli: alcune volte il medesimo argomento è ripartito su più capitoli, altre volte è contenuto in uno solo. Può, dunque, essere utile ricostruire noi uno schema d'indice più facilmente intelligibile, in cui compaia l'indicazione "Sezione" in riferimento ad ogni argomento.

SEZIONE PRIMA:

E' costituita da un unico saggio - *La filosofia della matematica e la sua logica: introduzione*, scritto dal curatore. È un'introduzione generale al volume, dove sono presentati sinteticamente i vari argomenti, con l'indicazione dei capitoli in cui essi vengono poi affrontati.

SEZIONE SECONDA

Illustra il background storico della filosofia della matematica del XX secolo e si articola in tre saggi:

a) *'Apriority and Application: Philosophy of Mathematics in the Modern Period'*

Lisa Shabel illustra il contributo di Kant alla filosofia della matematica, mostrandoci il background storico delle sue opere.

b) *Later Empiricism and Logical Positivism.*

John Skorupski, esperto di Mill, ricostruisce storicamente il pensiero di questi e lo analizza criticamente.

c) *Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics.*

Juliet Floyd, esperta di filosofia analitica, segue l'evoluzione del pensiero di Wittgenstein e le varie chiavi di lettura e di confronto che ne sono state date.

SEZIONE TERZA

Presenta le tre grandi scuole, ciascuna discussa da più saggi, perciò è opportuno considerarla costituita da tre Sottosezioni.

SOTTOSEZIONE PRIMA

Tre saggi dedicati a logicismo e neologicismo:

a) *The Logicism of Frege, Dedekind, and Russell.* William Demopoulos, professore di Logica e Filosofia della Scienza alla University of California di Irvine, e Peter

Clark, ricercatore all'università di St. Andrews, illustrano il programma logicista storico;

b) *Logicism in the Twenty-first Century*. Bob Hale e Crispin Wright descrivono in termini generali e con un'accentazione filosofica il programma neo-logicista, cioè tutta quella serie di tentativi che vengono attualmente compiuti per conservare l'idea di fondo del programma logicista di fondare l'aritmetica sulla logica, evitando, però di produrre sistemi che conducano ad antinomie.

c) *Logicism Reconsidered*. Agustín Rayo, presenta i dettagli tecnici del programma neo-logicista.

SOTTOSEZIONE SECONDA:

Consta di un solo saggio – *Formalism* -, in cui Michael Detlefsen, professore di Filosofia alla University of Notre Dame ed esperto hilbertiano, elabora una ricostruzione storica del formalismo, dall'antica Grecia a Hilbert, attraverso l'algebra della logica, con un audace ed interessante confronto fra Hilbert e Peacock.

SOTTOSEZIONE TERZA

Tre saggi dedicati all' Intuizionismo:

- a) *Intuitionism and Philosophy*. Carl Posy , da sempre interessato all'intuizionismo, presenta le tematiche filosofiche legate ad esso, con particolare riguardo alla tendenza di ricerca più attuale, che cerca di fondarlo sulla fenomenologia husserliana.
- b) *Intuitionism in Mathematics*. D. C. McCarty, professore di filosofia alla Indiana University, che sta ultimando un volume sull'intuizionismo, considera qui gli aspetti innovative dell'intuizionismo nell'ambito della matematica.
- c) *Intuitionism Reconsidered*. Roy Cook focalizza l'attenzione sul problema relativo alla differenza tra la logica classica e quella intuizionista, con particolare riferimento alla presentazione di quest'ultima da parte di Michael Dummett. Viene scartata, come insostenibile, l'ipotesi che tale differenza concerna il significato dei connettivi, e viene, invece, sostenuta l'ipotesi che la differenza riguardi la caratterizzazione della nozione di conseguenza logica. Cook considera, poi, gli argomenti di Dummett a favore della logica intuizionista, per concludere, però la propria analisi sostenendo che la logica intuizionista conduce in modo naturale ad un pluralismo logico.

SEZIONE QUARTA

Consta di tre saggi dedicati al naturalismo:

- a) *Quine and the Web of Belief*. Michael D. Resnik spiega in modo neutro, cioè privo di intenti critici, il naturalismo di Quine, dall'olismo all'argomento di indispensabilità.
- b) *Three Forms of Naturalism*. Penelope Maddy mette a confronto il naturalismo di Quine con quello di Burgess e col suo.
- c) *Naturalism Reconsidered*. Alan Weir mette il dito nella piaga, cioè elenca i principali punti deboli del naturalismo.

SEZIONE QUINTA

Presenta varie posizioni di filosofia della matematica del XX secolo. E' utile, quindi, dividerlo in sottosezioni.

SOTTOSEZIONE PRIMA

Presenta due saggi intorno al Nominalismo:

- a) *Nominalism*. Charles Chihara presenta in modo critico alcune forme di nominalismo, per poi indicare nella propria la forma migliore.
- b) *Nominalism Reconsidered*. Gideon Rosen e John P. Burgess, già coautori di un volume su questo argomento, criticano tutte le possibili forme di nominalismo.

SOTTOSEZIONE SECONDA

Presenta due saggi intorno allo Strutturalismo:

- a) *Structuralism*. Geoffrey Hellman, professore di Filosofia alla University of Minnesota e autore di “Mathematics without Numbers”, distingue fra varie forme di strutturalismo, illustrandone pregi e difetti.
- b) *Structuralism Reconsidered*. Fraser MacBride, ricercatore alla Birkbeck School of Philosophy, presentate critiche allo strutturalismo di Resnik e di Shapiro.

SOTTOSEZIONE TERZA

Consta di un solo saggio, - *Predicativity* – di Solomon Feferman in cui vengono presentati, con dettagli tecnici, varie versioni di predicativismo.

SEZIONE SESTA

Mark Steiner, in *Mathematics -- Application and Applicability*, presenta vari “sensi” dell’applicabilità della matematica e, alla fine, ne propone uno alquanto originale, secondo il quale, in realtà, è la matematica che si applica a se stessa in un universo pitagorico.

SEZIONE SETTIMA

Concerne tre argomenti di filosofia della logica, che è meglio vedere raggruppati in sottosezioni.

SOTTOSEZIONE PRIMA

Contiene due saggi dedicati alla conseguenza logica:

- a) *Logical Consequence, Proof Theory, and Model Theory*. Stewart Shapiro mostra come la teoria dei modelli e la teoria della dimostrazione conducano a due nozioni di conseguenza logica, differenti ma strettamente correlate, argomentando che nessuna delle due gli appare prioritaria.
- b) *Logical Consequence From a Constructivist Point of View*. Dag Prawitz, completa la presentazione effettuata nel capitolo precedente, illustrando una prospettiva che conduce in modo naturale alla teoria della dimostrazione.

SOTTOSEZIONE SECONDA

Contiene due saggi dedicate alla “logica della rilevanza”:

- a) *Relevance in Reasoning*. Neil Tennant, professore alla Ohio State University, argomenta a favore della richiesta che le premesse siano “rilevanti” per le conclusioni nella conseguenza logica, per evitare situazioni paradossali.

- b) *No Requirement of Relevance*. John P. Burgess controbilancia il saggio precedente, esprimendo le sue ragioni contro tale richiesta.

SOTTOSEZIONE TERZA

Conclude il volume illustrando, in due saggi, le caratteristiche della logica d'ordine superiore, concentrandosi su quella del secondo ordine:

- a) In *Higher-order Logic* Stewart Shapiro fa un'introduzione generale alla logica del secondo ordine.
- b) In *Higher-order Logic Reconsidered* Ignacio Jané professore di Filosofia all'Università di Barcellona, presenta i problemi della logica del secondo ordine.

Il volume è ponderoso e, *in primis* per questo motivo, poco maneggevole. Si fa veramente fatica a muoversi da un capitolo ad un altro e anche solo a soffermarsi su di un saggio. La strutturazione è asimmetrica, richiede il continuo riferimento alla prefazione per potersi orientare in un indice che, invece, mette tutti i capitoli sullo stesso piano. Tuttavia è importante superare questi limiti per poter valutare appieno i contributi che esso dà.

Non dobbiamo aspettarci di trovare una sorta di compendio di tutto ciò che è “consolidato” relativamente alle grandi aree tematiche affrontate. Al contrario, ci

vengono presentati programmi recenti, riletture innovative, ricostruzioni storiche originali, con i pregi e i limiti che ciò comporta: la ricchezza di stimoli e suggerimenti è sicuramente un aspetto positivo, mentre ciò che viene meno è quell'equilibrata sedimentazione, frutto di un assestamento dialettico, che caratterizza le letture più tradizionali. L'esempio più clamoroso di questo fatto – e che merita in questa sede un'attenzione particolare – è la trattazione che viene data dell'intuizionismo sotto l'aspetto filosofico. Carl Posy descrive la posizione di Brouwer utilizzando terminologia e strumenti della fenomenologia husserliana. Questo è, in effetti, il trend della ricerca attuale, ma non è una prospettiva che possa essere direttamente attribuita a Brouwer: anzi, si lavora in quella direzione proprio per colmare quello che agli studiosi appare un “vuoto” epistemologico lasciato da Brouwer, che, ricordiamolo, aveva una sua *Weltanschauung*, completamente ignorata dal saggio di Posy. Col volume di W.P. van Stigt [1990] la comunità scientifica è venuta a conoscenza del misticismo che aveva forgiato il pensiero matematico brouweriano: in esso sono state pubblicate le “rejected parts” della tesi e la correlata ampia presentazione del legame immediato e profondo che univa la concezione del mondo con l'intuizionismo matematico in Brouwer. La successiva traduzione, sempre ad opera di W.P. van Stigt, del pamphlet che era stato scritto da Brouwer [1905], nell'ambito della sua partecipazione ai dibattiti filosofici dei circoli studenteschi negli anni in cui frequentava l'università, ha sicuramente contribuito a far conoscere la *Weltanschauung* di Brouwer ai tempi in cui maturava la tesi di

dottorato [1907]. Tale *Weltanschauung* si esprime nella sua convinzione che la felicità dell'uomo possa realizzarsi solo nell'interiorità: per questo Brouwer giudica negativamente tutto ciò che conduce verso l'esterno, in particolare il linguaggio – in quanto strumento di dominio sulla volontà altrui – e la scienza – in quanto strumento di dominio sulla natura. Ed è proprio a partire da questo giudizio negativo che si pone per lui il problema di una fondazione della matematica che la rendesse moralmente accettabile, cioè di una fondazione della matematica che ne ponesse origini e sviluppo nell'intelletto umano e ne inibisse finalità applicative

L'intuizionismo brouweriano presenta certamente dei problemi, primo fra tutti quello dei cosiddetti “gradi di certezza”, che è stato formulato dal suo allievo Arend Heyting, a seguito di una critica al concetto di negazione che C.F.G. Griss aveva posto negli anni Quaranta. L'intuizionismo, si sviluppa passando da un'evidenza ad un'altra evidenza. Per Brouwer, però, “non P” esprime la constatazione che la costruzione che porterebbe all'evidenza di P non può essere compiuta fino in fondo. Dunque, notava Griss, per Brouwer la negazione si riferisce ad una costruzione che non è evidente, in quanto poi si rivela irrealizzabile, e, per questo, è in contrasto col metodo intuizionista. A questa critica, mossa dall'interno dell'intuizionismo brouweriano, rispose Heyting, in più riprese. Mentre Brouwer archiviò la questione col breve articolo [1948], dove illustrava l'impossibilità di convertire in nozioni positive alcune proprietà: ad esempio, per alcuni numeri reali, era impossibile passare dalla prova che fossero diversi da zero

alla prova che fossero maggiori di zero o alla prova che fossero minori di zero. Eliminare la sua nozione di negazione avrebbe comportato la perdita di tali proprietà.

E' chiaro che una simile risposta, specialmente in quanto formulata da una persona che non si era fatto analoghi scrupoli nel demolire intere parti della matematica classica, era inconcludente. Heyting proseguì, dunque, la riflessione sul problema posto da Griss e aggiunse anche altre nozioni intuizioniste introdotte da Brouwer ma che a lui o ad altri autori non sembravano completamente evidenti, quali i numeri naturali molto grandi e le successioni di libera scelta. Ne venne fuori una "scala" di evidenze, che lo portò ad ammettere che l'intuizionismo, come le altre scuole fondazionali, non aveva senso come fondazione assoluta, perché l'evidenza si era rivelata essere un criterio non univoco. Come conclusione, suggeriva una filosofia della matematica che, anziché proporre fondazioni, si costituisse come una sorta di presa di coscienza delle componenti platoniste, costruttive, formali presenti all'interno della pratica matematica.

Nell'ultimo decennio si è tentata, invece, un'altra strada per rispondere ai problemi che rimanevano aperti all'interno della concezione fondazionale intuizionista, cioè, specificamente, la presenza di diversi gradi di evidenza attribuiti alle varie nozioni intuizionista e problemi particolari inerenti l'accettabilità dei numeri naturali grandi e delle successioni di libera scelta. Si è utilizzata la fenomenologia di Husserl, che, nel suo ricercare gli atti che rendono possibile la conoscenza, aveva messo in luce l'aspetto intenzionale di quest'ultima e il suo costituirsi come un continuo gioco di intuizioni

dirette e indirette, con attese riempite o deluse, in cui l'oggetto – inteso come “determinabile x ” – viene man mano messo a fuoco, da differenti prospettive, senza mai essere esaurito. I “gradi di evidenza” sono, in questa prospettiva fenomenologica, tipici della nostra conoscenza degli oggetti, e, dunque, la fenomenologia si poneva come una buona candidata per risolvere i problemi lasciati aperti dall'intuizionismo brouweriano, svuotandoli della loro problematicità. Certo, il compito non era del tutto semplice, perché, per esempio, le successioni di libera scelta presentano un carattere di temporalità che gli oggetti matematici, nell'ottica di Husserl, non dovrebbero avere. Tuttavia, sforzi sono stati compiuti per rispondere a questa obiezione: si è messo in luce che le successioni di libera scelta conservano nel loro sviluppo le proprietà che sono godute dalle loro parti iniziali e, quindi, si è fatto notare che ciò conferisce loro quella caratteristica di omnitemporalità, di durata nel tempo, che Husserl attribuiva agli oggetti matematici. La fenomenologia, poi, con la sua focalizzazione dell'Ego trascendentale libera l'intuizionismo brouweriano da quell'aura di psicologismo che le è sempre pesata addosso per il suo ruolo fondamentale attribuito al soggetto: se come soggetto si pensa all'Ego trascendentale, il problema della mancanza di oggettività di ciò che viene costituito e conosciuto svanisce.

Come si vede, dietro la trattazione fenomenologica dell'intuizionismo brouweriano c'è stato e c'è un intenso lavoro di ricerca: non si tratta di un modo

standard, naturale, di esporre il pensiero dell'autore che non ha mai dato segno di voler far proprio il punto di vista di Husserl (né viceversa).

Qualche precisazione occorre anche a proposito del pensiero di Heyting, che aveva presentato al pubblico l'intuizionismo motivandolo in maniera diversa da quella brouweriana: fare matematica intuizionista veniva da lui proposto semplicemente come un'esplorazione dei limiti estremi delle facoltà umane. Heyting, personalmente, era sensibile a tematiche epistemologiche, com'è testimoniato dai suoi manoscritti, che sono stati resi noti in Franchella [1995], ma proponeva un intuizionismo slegato da particolari concezioni filosofiche generali e da convinzioni, questo per, evitare che divergenze di carattere filosofico potessero determinare un rifiuto dell'intuizionismo. Inoltre, il lungo cammino di ripensamenti che egli ha percorso dal 1930 in poi per enucleare una logica intuizionista soddisfacente era stato da lui intrapreso sempre in riferimento al pensiero di Brouwer e in fedeltà con esso. Egli ha più volte sottolineato che l'unico "dissenso" tra lui e Brouwer in riferimento alla logica è stato relativamente al ruolo del linguaggio, in particolare al ruolo del linguaggio simbolico. Brouwer, infatti, lo evitava in tutti i modi, perché, posto che il linguaggio aveva un mero ruolo persuasivo, gli sembrava che il simbolismo avesse poca carica suasoria. Heyting, invece, pur condividendo l'idea Brouweriana che la matematica non avesse una natura linguistica, ma che il linguaggio servisse di sostegno alla memoria e come strumento di comunicazione, riteneva che la scelta su quale linguaggio fosse più opportuno usare

fosse una questione di gusto, e non qualcosa di caratterizzante la posizione intuizionista. A parte questo, poi, Heyting ha cercato di mettere in luce il significato dei connettivi logici secondo quanto Brouwer aveva solo tratteggiato nei suoi scritti e che era stato equivocado, come era emerso alla fine degli anni Venti dal dibattito che si era svolto tra Lévy, Barzin ed Errera. Non era, infatti, chiaro, dai testi di Brouwer, cosa significasse esattamente la rilettura intuizionista dei connettivi, in particolare la rilettura della negazione. In riferimento a questo dibattito, Heyting andò precisando che “asserire A” intuizionisticamente significava affermare il possesso di una prova, cioè di una costruzione mentale, di A. Va ricordato che ci sono testimonianze storiche che mettono in luce come Brouwer avesse caldeggiato l’elaborazione di un sistema formale intuizionista da parte di Heyting, intesa come un’opera di approfondimento e divulgazione del pensiero intuizionista.

Una precisazione particolare va fatta a proposito di Dummett, che prosegue il lavoro di Heyting di chiarificazione della semantica intuizionista, condividendo di Heyting anche quello che potremmo chiamare un “disimpegno ontologico”, la volontà, cioè, di non fornire a sostegno dell’intuizionismo motivazioni che facciano riferimento a tematiche ontologiche. Tuttavia, si differenzia da Heyting per il ruolo *fondamentale* che assegna al linguaggio e alla comunicazione, ed è sulla base di tale ruolo che Dummett giustifica la sua posizione intuizionista, in quanto gli sembra costituire la migliore spiegazione della efficacia della comunicazione.

Possiamo, adesso, analizzare il saggio di Posy, scoprendone immediatamente i limiti. Egli presenta prima l'intuizionismo brouweriano, come fondato fenomenologicamente *sic et simpliciter*- l'unica precisazione: che fa è che Brouwer, a differenza da Husserl, non separa la questione della costituzione dell'oggetto dalla questione della sua esistenza oggettiva nel mondo. Poi introduce Heyting come intuizionista antimetafisico, che ha impostato la formalizzazione della logica; infine accenna all'intuizionismo di Dummett, sottolineando il fatto che questi ha generalizzato la posizione di Heyting applicando la semantica assertibilista a tutto il linguaggio in generale

Posy, dunque, compie una ricostruzione dell'intuizionismo non accurata dal punto di vista storico e teorico, e non mette in luce le motivazioni e la problematicità della presentazione che egli fa sua. Si sofferma, invece, successivamente, su quello che per lui costituisce un grave problema per l'intuizionismo: "la tensione fra la necessità dell'intuizionismo di assumere la possibilità dell'esistenza di questioni senza risposta (*unanswerable*) e la sua incapacità di farlo", tensione che egli vede adombrata da Kant in termini epistemologici come tipica della ragione umana. L'intuizionismo non può trovare una proposizione eternamente indecidibile e questo costituirebbe un grosso problema. Ma perché mai? L'intuizionismo non gode nel vedere sospesa la validità del principio del terzo escluso, non ha come scopo una battaglia contro questo principio. Il giorno in cui tutti i problemi matematici dovessero essere risolti, il principio del terzo

escluso varrebbe anche intuizionisticamente e non c'è nessun motivo teoretico per dispiacersi di ciò.

La presentazione degli aspetti filosofici dell'intuizionismo è, dunque molto carente. Esiste anche un ulteriore evidente limite in questo volume, che è opportuno citare per ragioni di completezza: manca una vera difesa dello strutturalismo (vengono elencate sole critiche). Questo fatto è già anticipato nell'introduzione di Shapiro ed è sostanzialmente motivata come soluzione di un conflitto d'interessi, dato dal fatto che egli si trova ad essere contemporaneamente curatore del volume e convinto sostenitore dello strutturalismo. Personalmente credo che, invece, ragioni di simmetria, avrebbero giustificato la presenza di un avvocato difensore nella sezione dedicata allo strutturalismo come nelle altre sezioni.

Non intendo, naturalmente, sostenere che in un manuale di filosofia della matematica e della logica debbano essere presentate solo posizioni consolidate, magari obsolete, ma mi sento in dovere di sottolineare come le difficoltà intrinseche alla realizzazione di un'opera del genere, progettata con la volontà di accogliere tutti i filoni di ricerca più recenti, non sono sempre state superate, in questo testo. Comunque, la quantità di idee, di prospettive, di collegamenti, che emerge da ogni saggio, carica del fascino della passione profonda di chi sta modellando e perseguendo un proprio, coinvolgente, oserei dire totalizzante, progetto, rende il volume un'opera preziosa che ciascuno di noi, prezzo permettendo, dovrebbe consultare spesso, gustandosela

lentamente. Con la cautela – che, però, dovrebbe sempre esserci, anche nella lettura di un manuale, di considerarne il contenuto non una verità immutabile, una sorta di dato di fatto, bensì uno spunto di riflessione critica. Le bibliografie, poste al termine di ogni saggio, sono certamente molto preziose per eventuali approfondimenti.

MIRIAM FRANCHELLA

Bibliografia

Brouwer L.E.J. [1905] *Leven, kunst en mystiek*, Delft, Waltman; trad. ingl. di W.P. van Stigt *Life, art and mysticism*, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37 (1996), pp. 389-430.

Brouwer L.E.J. [1907] *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam, Maas & van Suchtelen, 1907, trad. ingl. *On the foundations of mathematics* in Brouwer [1975], pp. 11-101.

Brouwer L.E.J. [1948] “Essentieel negatieve eïdenschappen”, *Indagationes Mathematicae* 10, pp. 322-323; engl.transl. in Brouwer [1975] pp. 478-479.

Brouwer L.E.J. [1975] *Collected works*, vol. 1, A. Heyting (ed.), Amsterdam, North-Holland

Franchella M. [1995] “Like a bee on a windowpane: Heyting’s reflections on solipsism”, *Synthese* 105, pp. 207-251.

Van Stigt, W. P. (1990) *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam, North-Holland.