Recensione:

Mark van Atten, *On Brouwer*, 2004

di

Giuseppina Ronzitti

giuseppina.ronzitti@univ-nancy2.fr

2R – Rivista di Recensioni Filosofiche

Sito Web Italiano per la Filosofia

www.swif.uniba.it/lei/2r

Mark van Atten, *On Brouwer*, Wadsworth, 2004, pp 84, Note finali pp 4, Bibliografia pp 7, Indice p. 1, Prefazione 2, Prezzo (Amazon) $15,95.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matematico olandese noto per i suoi importantissimi contributi alla topologia, è conosciuto anche, e forse in filosofia soprattutto, come iniziatore dell'*intuizionismo*, un approccio fondazionale che, nel dibattito sviluppatosi a partire dall'inizio del XX secolo, si oppose al programma formalista di Hilbert, a quello logicista di Frege e Russell e in generale al platonismo matematico in filosofia e al cantorismo in matematica. Il *programma intuizionista* nelle intenzioni di Brouwer, è un programma di tipo essenzialmente matematico: Brouwer aspirava alla ricostruzione delle teorie matematiche interamente su basi che oggi noi chiameremmo, genericamente, *costruttive*. Che il programma intuizionista contenesse, e che fosse ispirato da, una critica essenzialmente filosofica nei confronti dei metodi (logici e insiemistici) sempre più astratti che si andavano affermando in matematica, non c'è dubbio, come sovente accade. Sul fatto che Brouwer fosse non solo un matematico, un matematico con idee filosofiche, ma anche un filosofo *tout court*, ossia che si possa parlare di un qualcosa come 'la filosofia di Brouwer', si potrebbe discutere. Sembra tuttavia che l'idea che Brouwer fosse (anche) un filosofo e che l'intuizionismo sia una filosofia, si sia in qualche modo affermata, con apprezzamenti non sempre uniformi. Ad esempio, secondo quanto scrive lo storico Grattan-Guinness [2000], le origini della filosofia di Brouwer sono da ricercarsi in parte in una cattiva comprensione di alcuni testi mistici e in parte in una lettura semplicistica del pensiero kantiano. Di opinione alquanto diversa è Mark van Atten che, convinto dell'importanza delle idee filosofiche di Brouwer, con questo breve saggio si propone di fornire un'introduzione appunto a Brouwer come filosofo, dando al contempo una nuova interpretazione della sua filosofia.

Il saggio si compone di sei brevi capitoli che trattano temi fondamentali dell'Intuizionismo matematico e logico. Lo scopo è quello di mostrare come i principi di ragionamento assunti in questo contesto e i teoremi che ne conseguono siano in effetti implementazioni, per così dire, di idee filosofiche; prima fra tutte l'idea di *soggetto creativo*. Ad esempio, per van Atten è la riflessione sull'attività del soggetto creativo che permette a Brouwer di arrivare al concetto che sta alla base del cosiddetto *bar theorem* (a cui è dedicato il quarto capitolo), ossia il concetto di *dimostrazione canonica*. E in questo senso, avanzando una tesi alquanto impegnativa, van Atten (p.65) sostiene che la dimostrazione del bar theorem "dipende dalle proprietà del soggetto creativo".

Nonostante le dimensioni ridotte del volume, van Atten tratta non solo le tappe in qualche modo obbligate, quali i rapporti tra matematica, linguaggio, verità e logica, e il concetto di dimostrazione matematica (primo e secondo capitolo), ma anche i *principi di continuità*, un tema caratteristico e poco frequentato dai testi introduttivi sull'intuizionismo (terzo capitolo, *Choice Sequences*). Gli ultimi due capitoli sono dedicati a un'esposizione e difesa della teoria del soggetto creativo, che van Atten propone di interpretare come soggetto trascendentale nel senso di Husserl. Secondo l'autore, infatti, l'approccio fenomenologico permetterebbe di affrontare efficacemente le critiche di psicologismo e solipsismo comunemente rivolte all'intuizionismo a causa dell'uso di questa nozione in argomenti matematici.

Il problema è il seguente. Per Brouwer un oggetto matematico esiste se lo si è costruito (mentalmente), una dimostrazione matematica è una costruzione (mentale), e una proposizione matematica è vera se la si è dimostrata. L'associazione tra intuizionismo e idealismo è immediata dato che in entrambi i contesti la priorità è data al *soggetto di conoscenza* (che effettua la costruzione, dimostrazione) piuttosto che all'*oggetto* della conoscenza. L'Intuizionismo va così incontro alla stessa critica di fondo che si rivolge comunemente alle filosofie di matrice idealista. In particolare, nel contesto della matematica, il problema è quello di spiegare come sia possibile l'oggettività e la condivisibilità di una conoscenza che riguarda oggetti la cui realtà si pensa come essenzialmente dipendente dalla mente che li concepisce, e dunque, almeno in principio, si qualifica come soggettiva e incondivisibile.

Le strategie per affrontare questo problema sembrano essere essenzialmente due. La prima consiste nel rinnegare, in qualche modo, il legame tra l'intuizionismo e quella che sembra essere la sua filosofia d'elezione. Ad esempio, all'interno dello schema concettuale della filosofia analitica, la questione ontologica dell'esistenza degli enti matematici può tradursi in una questione logico-semantica relativa all'interpretazione degli enunciati (matematici) esistenziali (si veda al proposito il lavoro di Michael Dummett, ad esempio Dummett [1975] e per una critica dell'approccio dummettiano Tieszen [2001]). La seconda consiste nel cercare di rivalutare, senza rinnegarlo, l'approccio idealista-soggettivista dandone un'interpretazione meno radicale che pur rimanendo essenzialmente fedele all'assunto originale (la priorità del mentale) permetta in qualche modo di affrontare le principali obiezioni che ad esso vengono rivolte. Mark van Atten segue questa strada e la scelta di reinterpretare l'Intuizionismo nei termini della fenomenologia husserliana, appare, almeno sulla carta, promettente dato che per Husserl, come per Frege, matematica e logica non sono riducibili alla psicologia.

La possibilità di un collegamento tra intuizionismo e fenomenologia era già stata notata, come anche van Atten ricorda, oltre che da Oskar Becker, da Heyting [1931]. In tempi più recenti questo tema è stato estesamente indagato dal filosofo americano Richard Tieszen (tra i tanti scritti, si veda ad esempio Tieszen [1984, 1994]). Appare dunque un po' strano che van Atten non si riferisca, neppure brevemente, al lavoro di Tieszen, e che ne citi in bibliografia un solo articolo, di cui, con Tieszen e van Dalen, è coautore [2002].[1]

Inserendosi comunque in questa linea di pensiero, van Atten esplora la possibilità di una fondazione fenomenologica, nel senso di Husserl, dell'intuizionismo. In particolare con questo saggio l'autore intende mostrare come il metodo fenomenologico possa essere utilizzato per spiegare e fondare filosoficamente la nozione di *soggetto creativo* (*creating* o *creative subject* [2]). Per van Atten è questa la nozione chiave dell'intuizionismo, in un senso forte secondo il quale la matematica intuizionista altro non è che "un'elaborazione della nozione di soggetto creativo" (p. 5) da cui segue che ogni argomento in questo contesto dovrebbe chiamarsi "argomento del soggetto creativo" (p. 64). L'interpretazione fenomenologica di questa nozione, secondo l'autore, permette di affrontare e risolvere il problema della possibilità dell'intersoggettività[3].

Con *soggetto creativo* (si veda Brouwer [1948]) si intende un soggetto matematico idealizzato, la cui attività è pensata come scandita nel tempo e il tempo è

[1]

[2] Nel testo inglese Mark van Atten, seguendo un'impostazione recente, utilizza l'espressione *creating subject*, invece del più comune *creative subject*.

[3] Per un approccio diverso, che tuttavia arriva alle stesse conclusioni, si veda Placek [1999].

pensato come diviso in stadi discreti. Ad ogni singolo stadio il soggetto creativo si trova in un particolare stato di conoscenza, ad esempio ha dimostrato un certo enunciato *P* oppure no. Il progresso della sua attività può essere descritto da una sequenza binaria (ossia a due valori, ad esempio 0,1) $\alpha := \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$ con la quale il soggetto creativo registra l'eventuale ottenimento di un risultato positivo: se allo stadio *n* il soggetto creativo ha dimostrato *P*, assegnerà il valore 1 a $\alpha(n)$, diversamente assegnerà 0. Questo metodo è utilizzato per produrre controesempi a enunciati della matematica classica. (per una spiegazione dettagliata si veda Dummett [2000, pp. 234-249]).

La critica che viene rivolta a questo tipo di ragionamento è quella di raffigurare le verità della matematica, comunemente pensate come oggettive e atemporali, come dipendenti dal soggetto e dal tempo (è il *soggetto* che costruisce nel *tempo*, la sequenza che potenzialmente contiene l'informazione sul valore di verità di un enunciato, se dell'enunciato è possibile dare una dimostrazione o una confutazione). Dal punto di vista matematico, queste obiezioni possono essere affrontate introducendo il cosiddetto *schema di Kripke* (come nota anche l'autore a p. 69) con il quale si postula che per ogni proposizione *P* esiste una sequenza binaria crescente α tale che *P* è vera se e solo se esiste *n* tale che $\alpha(n)=1$, eliminando così il riferimento esplicito al tempo e (soprattutto) al soggetto che crea la sequenza. Tuttavia, se si è propensi a considerare, come fa van Atten, l'idea di soggetto creativo sia una delle basi sulle quali poggia la grandezza di Brouwer come filosofo (si veda la prefazione), la possibilità della sua eliminazione dall'Intuizionismo sicuramente non può piacere. L'autore del saggio nota (senza però elaborare questo punto) che comunque l'introduzione dello schema di Kripke viene giustificata (filosoficamente) ricorrendo alle stesse nozioni per l'eliminazione delle quali viene introdotto (p. 69). Occorre notare – e l'autore non lo fa - che l'accettazione dello schema di Kripke è materia di controversie (matematiche) anche tra gli intuizionisti essendo lo schema, nella sua forma non ristretta, incompatibile con una delle assiomatizzazioni proposte per l'analisi formale intuizionista, il sistema FIM di Kleene e Vesley (si veda Kleene e Vesley [1965] e, per una spiegazione più accessibile, l'ottimo Dragalin [1988] p. 135).

Van Atten potrebbe replicare che, in effetti, tutto il libro è una difesa (implicita) proprio dell'idea che la nozione di soggetto creativo non è eliminabile dai ragionamenti della matematica intuizionista e che l'unica cosa da fare esplicitamente è quella di affrontare la principale obiezione filosofica a cui questo approccio va incontro, ossia la questione della possibilità dell'intersoggettività della conoscenza matematica. A questo argomento viene dedicato l'ultimo capitolo del saggio dove si difende la tesi che l'Intuizionismo non può essere accusato di psicologismo e soggettivismo (o addirittura solipsismo) se si interpreta il soggetto creativo come soggetto trascendentale nel senso husserliano piuttosto che in quello kantiano. Si veda in particolare il paragrafo 6.3, "The creating subject as phenomenology's transcendental subject".

La scelta di dare, dell'Intuizionismo in generale e della nozione di soggetto creativo in particolare, un'interpretazione husserliana (invece della più comune kantiana, si veda ad esempio Parsons [1986]) è motivata essenzialmente dal fatto che nella concezione kantiana, secondo van Atten, il soggetto trascendentale (ego) è paragonabile a un oggetto logico (p. 79), a cui si arriva per deduzione (seppur deduzione trascendentale) e non attraverso un'analisi di ciò che "ci è dato". In sostanza, mentre il soggetto kantiano è collocato in ultima analisi in un mondo oggettivo, il soggetto trascendentale husserliano non presuppone alcuna oggettività. Con un linguaggio dai toni un po' mistici, van Atten (p. 77) spiega che “il soggetto trascendentale ha o intende un mondo. Attraverso i suoi atti, il soggetto trascendentale costituisce un mondo, e il soggetto dunque *lascia* che il mondo si manifesti”.[4] L'italico, nell'originale, suggerisce che qualcosa di fondamentale sia implicato dall’azione del ‘lasciare’, un qualcosa che però rimane avvolto nel mistero.

L'idea di fondo è che un'interpretazione filosoficamente fedele dell'idea di soggetto creativo, così come concepito da Brouwer, non può essere fondata su un'oggettività che si suppone data (questo è ciò che fa la teoria kantiana nell'interpretazione di van Atten). In questa direzione, la base offerta dall'interpretazione husserliana sembra invece dotata degli strumenti concettuali adatti a rendere conto della soggettività (e dell’oggettività) a partire dalla soggettività, senza presupposizioni accessorie. Inoltre, van Atten (p. 80) sostiene, l'interpretazione husserliana di soggetto trascendentale permette di “risolvere il problema di come rendere conto dell'intersoggettività”. La chiave di volta, secondo l’autore, sta nel fatto che “nella nozione di soggetto trascendentale sono implicati aspetti che sono uguali per tutti, precisamente in virtù del fatto che ognuno è un soggetto, e che in nessun modo dipendono da un fatto empirico”. In sostanza la matematica, vista come risultato dell'attività del soggetto creativo, dipenderebbe solo dalle caratteristiche che tutti i soggetti condividono semplicemente in virtù del fatto di essere soggetti. La conclusione è che “se costruiamo il soggetto creativo in questo modo, allora l'intersoggettività non è

[4] [...] the transcendental subject has or intends a world. Through its acts, the transcendental subject constitutes a world, and the subject thus *lets* the world manifest itself.

un problema per il soggetto creativo ma piuttosto una sua conseguenza”. Questo argomento tuttavia si espone all'ovvia obiezione di circolarità. Non si vede infatti come l'assunzione (implicita) dell'esistenza di caratteristiche che tutti i soggetti condividono in quanto soggetti possa essere giustificata senza postulare, appunto, l'intersoggettività.

Il livello del libro non è sempre uniforme: alcuni passaggi sono decisamente troppo semplicistici (ad esempio si veda p. 3 su platonismo e formalismo), mentre altri richiedono, per essere compresi, competenze che non dovrebbero essere presupposte in un testo che si propone come introduttivo. È questo il caso ad esempio della spiegazione che viene data della differenza tra *principio di continuità* (C-N) e *principio di continuità debole* (WC-N)[5] (p. 35). La differenza sta nel fatto che la formulazione di C-N, ma non quella di WC-N, utilizza la nozione di *continuous functional*. WC-N può essere derivato come teorema a partire da C-N, ma non vale l'opposto e in questo senso è un principio più debole. Van Atten invece caratterizza la differenza facendo riferimento al concetto di *local continuity*, e dunque, implicitamente, alla discussione sul *teorema di continuità* e sulla forza dimostrativa di C-N e WC-N (si veda Veldman [1981]). Ancora, a pagina 2 (ma anche in altri punti) viene detto che poiché un oggetto è dato specificandone la costruzione, dal punto di vista intuizionista la nozione di identità primaria è quella di identità intensionale. Questo viene dato come assodato e il lettore non avvertito rimane ignaro del fatto che la nozione di identità dipende dalla nozione di *choice* sequence[6]

[5] C-N sta per "Continuity for Numbers" e "WC-N" sta per "Weak Continuity for Numbers". Questa è la notazione standard, si veda ad esempio Troelstra e van Dalen [1988, p. 208-212]. Veldman [1981] usa invece CP per WC-N e AC_{10} per C-N.

[6] Una *choice sequence* è una sequenza infinita (in senso potenziale) $\alpha := \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2)...$ di numeri naturali i cui valori $\alpha(n)$ vengono scelti uno dopo l'altro. A seconda delle possibili caratterizzazioni del processo di scelta (secondo una regola; in modo casuale; sia l’uno che l’altro a secondo delle circostanze; e altro ancora) si hanno diverse nozioni di choice sequence, caratterizzate da principi di ragionamento diversi.

adottata. Ad esempio, nel caso delle sequenze di scelta caratterizzate dal sistema di assiomi FIM, la nozione primaria di identità è quella estensionale.

Van Atten considera Brouwer un filosofo, e non solo un filosofo della matematica, come le prime righe della prefazione, senza affermarlo esplicitamente, suggeriscono. La sua filosofia, l'Intuizionismo, necessita però di un'interpretazione che la armi contro le più ovvie obiezioni. La scelta di Van Atten, utilizzare gli strumenti concettuali della fenomenologia, oggi in voga, è metodologicamente sensata in quanto questa si propone esplicitamente come mezzo per analizzare la struttura dell'esperienza e dunque anche dell'esperienza della creazione matematica, tema centrale dell'Intuizionismo. Tuttavia, come l'autore stesso nota nell'ultima pagina del suo saggio, uno degli intenti della fenomenologia di Husserl era quello di fondare filosoficamente la matematica classica. In questo senso l'approccio fenomenologico sembra essere generalmente applicabile (per fondare sia la matematica classica che quella intuizionista) e al suo interno si devono distinguere, sostiene van Atten, livelli di evidenza. La soluzione, per van Atten, consiste allora nel dire che gli oggetti di cui tratta l'Intuizionismo sono quelli che ci vengono dati con un maggior grado di evidenza. Van Atten tuttavia non sviluppa questo punto e in particolare non specifica cosa intende per grado di evidenza. Per Husserl il grado di evidenza (degli oggetti percepibili) è inversamente proporzionale al numero degli atti percettivi (parziali) necessari per massimizzare la conoscenza (si veda Tieszen [1984, p. 405]). Sicuramente il ricorso a un concetto di evidenza elaborato secondo questa linea non può essere utilizzato in supporto della tesi della maggiore evidenza degli oggetti della matematica intuizionista.

Lo sforzo su cui si concentra il saggio è quello di ritrovare nelle idee chiave dei principi e dei teoremi della matematica intuizionista un carattere fenomenologico distintivo. A p. 41 ad esempio, l'autore scrive che la nozione di *intenzionalità* è al centro della dimostrazione del *bar theorem*.

Questa affermazione, se presa alla lettera, riduce immotivatamente il ruolo del ragionamento propriamente matematico nella matematica stessa per evidenziare eccessivamente il ruolo della lettura filosofica del ragionamento matematico. In particolare non rende conto della complessità della struttura della dimostrazione stessa (che viene data in dettaglio nel capitolo 4). La nozione centrale della dimostrazione del teorema, l'idea di *dimostrazione canonica* (o dimostrazione totalmente analizzata), è provvista di una descrizione matematica (si veda ad esempio Dummett [2000] pp. 68-75 oppure Veldman [2006]. È da questa che il teorema *dipende*. Si può anche asserire l'esistenza di un legame tra idea filosofica, definizione matematica e teorema, ma dire che il teorema *dipende* dall'idea filosofica significa saltare un passaggio ineliminabile. Mentre è chiaro cosa si intende quando si dice che una dimostrazione *dipende da* una definizione (matematica), in quanto quello che è in gioco è una relazione formale, non è altrettanto chiaro cosa si debba intendere con l'affermazione che una dimostrazione *dipende da* un insieme di proprietà caratteristiche di una nozione filosofica. La scelta terminologica, anche al di là del giudizio sullo spessore filosofico dell'affermazione, appare dunque infelice.

Proposto nella serie Wadsworth dedicata a introduzioni brevi e accessibili alle idee dei grandi filosofi della storia, il testo di van Atten, si propone di introdurre il lettore al pensiero filosofico di Brouwer. Il testo tuttavia propone un'interpretazione particolare dell'intuizionismo senza mettere a disposizione del lettore gli elementi necessari per elaborare una critica. In questo senso non appare essere un testo introduttivo, ma piuttosto un saggio. Il libro, nel suo complesso, avrebbe beneficiato di un breve capitolo dedicato al metodo fenomenologico in matematica e logica, che non viene introdotto a nessun punto ma semplicemente utilizzato. A pagina 17, ad esempio si parla di 'struttura intenzionale' di una dimostrazione, ma la nozione tecnica di 'struttura intenzionale' non viene introdotta, né prima né dopo. Nonostante ciò e nonostante la brevità del saggio, molti argomenti sono trattati dettagliatamente e con chiarezza. Il lettore che non abbracci già in partenza la tesi che Brouwer fosse un filosofo non trova qui gli elementi per cambiare idea in quanto Van Atten, che non si pone la questione, non offre argomenti a suo sostegno.

GIUSEPPINA RONZITTI

BIBLIOGRAFIA

M. van Atten, D. van Dalen, R. Tieszen (2002), "Brouwer and Weyl: The phenomenology and mathematics of the intuitive continuum", *Philosophia Mathematica*, 10(3), pp. 203-226.

Brouwer L.E.J. (1948), "Essentieel negatieve eigenschappen", *Indagationes Mathematicae*, 10, pp. 322-323. Traduzione inglese in A. Heyting (a cura di) (1975), *Collected Works I. Philosophy and Foundations of Mathematics* (a cura di), North-Holland, Amsterdam.

Dummett M. (1975), "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", in M. Dummett (1978), *Truth and Other Enigmas*, Oxford University Press, Cambridge Mass., pp. 186-201.

Dummett M. (2000), *Elements of Intuitionism*, (seconda edizione). Clarendon Press, Oxford.

Dragalin A.G. (1988), *Mathematical Intuitionism. Introduction to Proof Theory*, American Mathematical Society, Vol. 67.

Grattan-Guinnes Y. (2000), *The search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Vol. I, p. 480.

Heyting, A. (1931), "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis*, 2, pp. 106-115. Trad. ingl. in P. Benacerraf, H. Putnam (a cura di) (1983), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 52-60.

Kleene S.C., Vesley R.E. (1965), *The foundation of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions*, Studies in Logic and the Foundations of mathematics, North-Holland, Amsterdam.

Parsons C. (1986), "Intuition in constructive mathematics", in J. Butterfield (a cura di) (1986), *Language, mind and logic*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 211-229.

Placek T. (1999), *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Kluwer Academic Publisher.

Tieszen, R. (1984), "Mathematical Intuition and Husserl's Phenomenology", *Noûs*, 18, pp. 395-421.

Tieszen, R. (1994), "What is the Philosophical Basis of Intuitionistic Mathematics ?", in D. Prawitz, B. Skyrms, D. Westerståhl (a cura di) (1994), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Elsevier, Amsterdam, pp. 579-594.

Tieszen, R. 2001, “Intuitionism, Meaning Theory and Cognition”, *History and Philosophy of Logic*, 21(3), pp. 179-194. Ristampato in R. Tieszen, 2005, pp. 227-247.

Tieszen, R. (2005), *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Veldman, W. (1982), “On the continuity of functions in intuitionistic real analysis, some remarks on Brouwer's paper: Über definitionsbereiche von funktionen”, Report 8210, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Nijmegen.

Veldman, W. (2006), “Brouwer’s real Thesis on Bars”, in G. Heinzmann, G. Ronzitti (a cura di) (in via di pubblicazione), *Constructivims: Mathematics, Logic, Philosophy and Linguistics*. Numero speciale di *Philosophia Scientiæ*.