Recensione:

Charles S. Chihara, *A Structural Account of Mathematics*, 2004

di

Ottavia Spisni

ottavia.spisni@gmail.com

2R – Rivista di Recensioni Filosofiche – Volume 10, 2008

Sito Web Italiano per la Filosofia

www.swif.uniba.it/lei/2r

Charles S. Chihara, *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2004, pp. 380, £50.00.

A Structural Account of Mathematics (2004) di Charles S. Chihara si inserisce nell'ambito accademico e specialistico della filosofia della matematica. L'imponente lavoro è la quarta pubblicazione del Professore Emerito in Filosofia all'Università di Berkeley in California in questo ambito di ricerca. Essa è preceduta cronologicamente da: *Ontology and the Vicious Circle Principle* (1973), *Constructibility and Mathematical Existence* (1990), *The worlds of Possibility: Modal Realism and the Semantics of Model Logic* (2001). Il testo nasce nel tentativo di fare luce sul modo in cui gli scienziati fanno matematica. Chihara sviluppa la propria tesi sul contenuto strutturale delle teorie matematiche rivolgendosi sia ad un pubblico accademico e specialistico che ad un pubblico meno preparato. Il testo, naturalmente, non manca di complessità in quanto le varie teorie discusse e proposte si trovano ad essere stratificate e vengono riprese nei diversi momenti della trattazione da punti di vista differenti. Nel testo è presente una *pars destruen*s in cui si criticano i predecessori sul medesimo terreno di indagine, la filosofia della matematica: Saphiro (p. 66), Resnik (p. 84), Gödel (p. 100), Quine (p. 104), Hellman (p. 113), Putnam (p. 123) e altri. Attraverso un'accurata esposizione ed un equo esame delle teorie criticate, il testo si inserisce appieno nel dibattito specialistico contemporaneo. Di non minore importanza è la prolifica discussione con John Burgess e Gideon Rosen. A livello formale il testo consta di una Prefazione, una Introduzione, undici capitoli principali suddivisi a loro volta in paragrafi (1. *Five puzzles in Search of an Explanation*; 2. *Geometry and Mathematical Existence*; 3. *The van Inwagen Puzzle*; 4. *Structuralism*; 5. *Platonism*; 6. *Minimal Anti-Nominalism*; 7. *The Constructibility Theory*; 8. *Constructible Structures*; 9. *Applications*; 10. *If-Thenism*; 11. *Field's Account of Mathematics and Metalogic*), due appendici, la Bibliografia e l'indice dei nomi presenti nel testo. La ricchezza del testo è, inoltre, frutto di numerose lezioni e conferenze dell'autore, e di discussioni seminariali in filosofia della matematica che Chihara ha tenuto a Berkeley negli anni Novanta del Secolo scorso: si tratta dunque di un lavoro di ricerca non isolato ma al quale hanno contribuito più menti filosofiche, alla ricerca di una visione generale il più comprensiva possibile sull'argomento, pur non rinunciando al fattore essenziale della coerenza.

Chihara inizia la trattazione delle proprie tesi spiegando il perché della necessità di sviluppare una teoria strutturalista della matematica. Essa vuole infatti sgombrare il campo dagli enigmi principali sulla natura della matematica che sono stati discussi e alimentati, dalla letteratura filosofica del Ventesimo secolo.

Nell'Introduzione l'Autore spiega cosa egli intenda per una visione nominalista della filosofia, riferendosi ad essa come "Il Grande Quadro": ogni specifica branca della filosofia deve tendere a proporre "Il Grande Quadro", cioè una visione di insieme, pur non mettendo da parte l'interesse per i problemi specifici. Il filosofo alla ricerca di questo quadro di insieme ha come alleato principale l'elemento metodologico della "coerenza": «We seek an understanding of X that is consistent with, and holds together with, the other views we accept but the universe and about us[1]» (p. 1). L'importanza dei paradossi e delle antinomie in filosofia sorge nell'incontro con le teorie rivoluzionarie della scienza (per esempio la teoria dell'evoluzione di Darwin), teorie che sono in grado di fare breccia nella nostra maniera di concepire il mondo e noi stessi, nelle nostre credenze basilari. È compito del filosofo tentare di rimettere insieme i frammenti delle nostre teorie, conoscenze e credenze per sviluppare e creare un nuovo e coerente "grande quadro" dell'universo: «Since a paradox is a symptom that our body of beliefs and principles is not coherent, the above account of one of the principal goals of philosophy allows us to see why philosophers feel the need to attempt to refashion our beliefs and principles into a more coherent Big Picture in which the paradoxes can no longer be constructed[2]» (p. 4).

[1] "Cerchiamo una comprensione di X che ad X sia conforme, che con X sia in accordo e anche con gli altri punti di vista che accettiamo circa l'universo e circa noi stessi".

[2] "Poiché un paradosso è un sintomo del fatto che il nostro corpo di credenze e principi non è coerente, il resconto principale di uno dei principali obiettivi della filosofia ci permette di vedere perché i filosofi sentono la necessita` di riformare le nostre credenze e i nostri principi in un "Grande Quadro" che abbia maggiore coerenza, in cui i paradossi non possano più essere costruiti."

Lo scopo principale del testo è descritto dall'Autore come lo sviluppo di una teoria della matematica che sia distinta sia dallo Strutturalismo pur utilizzandone alcune idee chiave; si tratta qui di fare filosofia della matematica tenendo presente quel "Grande Quadro" di cui sopra, piuttosto che dettagliate questioni di logica. Si pongono questioni epistemologiche e metafisiche, con l'intento di farle collimare (o funzionare) assieme alle problematiche della matematica applicata alle scienze naturali. Un esempio di tale tentativo rivoluzionario è la filosofia della matematica conosciuta come "intuizionismo" proposta da L. E. J. Brouwer, Herman Weyl e Arend Heyting (pp. 92-93). Il punto di vista dell'autore è il seguente: «Furthermore, despite appearances to the contrary, I believe that one can understand the researches of even those philosophers of mathematics who are primarily interested in theorem-proving, as contributing towards the long-range goal of developing the kind of Big Picture I have been discussing. Such a strategy is apparent in the technical work of the 'reconstructive nominalist'[3]» (p. 5).

Nell'ultima parte del Ventesimo Secolo ci sono stati diversi tentativi di sviluppare sia un tipo di matematica alternativa sia un tipo di fisica matematica alternativa classificate come "nominaliste". La domanda che Chihara si pone è se queste versioni nominaliste della matematica e/o della fisica siano in grado di contribuire alla nostra comprensione della matematica e/o della fisica utilizzate correntemente dagli scienziati (e con ciò si intende dunque rispondere non solo a questioni di carattere epistemologico ma si tratta di inserirsi in quel filone scientifico di ricerche e scoperte acquisite e testate di cui abbiamo padronanza). Il testo fa riferimento alla teoria costruttivista esposta in *Constructibility and Mathematical Existence*, (Chihara 1990). In linea con il suo rifiuto del Realismo matematico (o Platonismo), l'autore si prefissa di sviluppare il lavoro iniziato con il testo del 1990: presentare e sviluppare un nuovo sistema della matematica che non faccia riferimento (e che non presupponga) agli oggetti matematici. Cos'è una ricostruzione nominalistica

[3] "Oltretutto, nonostante l'apparenza che sia il contrario, credo che si possano comprendere le ricerche anche di quei filosofi della matematica che sono interessati principalmente ad indagare i terreni di prova dei teoremi, in quanto contribuiscono a sviluppare il tipo di "Grande Quadro" che ho discusso. Una tale strategia è apparentemente un lavoro tecnico del "nominalismo ricostruttivo".

della matematica? Per nominalista Chihara intende principalmente anti-realista, o anti-platonista. Dove il realismo sostiene che l'oggetto matematico esista, il nominalista sostiene la posizione opposta: tali oggetti non esistono nella realtà. In questo senso il punto di vista portato avanti da entrambi i testi è nominalista. Chihara analizza i sistemi matematici utilizzati attualmente dagli scienziati per mostrare come gli stessi siano compatibili con una prospettiva nominalista. Fondamentalmente il lavoro di Chihara è volto a risolvere tre problemi, tre paradossi teoretici (nel testo i problemi descritti sono cinque), indipendenti tra loro, circa la natura della matematica (p. 8). Il primo paradosso (*A puzzle about Geometry)* riguarda gli *Elementi* di Euclide, i cui tre postulati circa la costruzione possibile delle figure geometriche (geometria piana) sono stati scalzati da i primi tre assiomi in *I Fondamenti della Geometria* di Hilbert. Il secondo problema (*Different attitudes of practicing mathematicians regarding the ontology of mathematics*) porta alla luce l'enorme differenza che intercorre tra gli atteggiamenti metodologici circa le teorie matematiche su cui lavorano i teorici e gli atteggiamenti metodologici dei fisici circa le loro teorie empiriche (p. 11). Si tratta dei diversi atteggiamenti che i matematici hanno circa l'ontologia della matematica: solo quando facciamo matematica noi consideriamo la mera consistenza di un concetto come sufficiente garanzia dell'esistenza di qualcos'altro che possa rientrare all'interno dello stesso. Il terzo problema (*The inertness of mathematical objects*) riguarda una strana caratteristica degli oggetti matematici che li rende diversi dagli oggetti fisici che ci sono familiari. Si tenta di rispondere alla domanda circa il modo in cui noi sappiamo dell'esistenza e conosciamo le proprietà degli oggetti matematici (p. 13). Il quarto paradosso teoretico (*Consistency and mathematical existence*) è quello della coerenza: "*mathematical existence is a matter of consistency*" (p. 17). Il quinto paradosso è il problema portato alla luce dal metafisico (corrente neo-Scolastica) Peter Van Inwagen: esso si basa su considerazioni metafisiche e riguarda la nostra capacità di intuire alcuni fondamenti della teoria degli insiemi (relazioni intrinseche, relazioni estrinseche, proprietà estrinseche, relazioni interne ed esterne). Si considerino alcune relazioni matematiche, consideriamo ad esempio la relazione che un'ellisse ha con la propria eccentricità (il rapporto tra la lunghezza del suo asse maggiore e del suo asse minore, che è un numero reale maggiore di uno). Ad esempio: *E* è un'ellisse con un asse maggiore di due volte più lungo del suo asse minore, dunque *E* sta nella sua eccentricità in relazione al numero reale 2. Van Inwagen si chiede in quale delle tre categorie ammesse dalla Neo-Scolastica (interna, esterna, estrinseca) si inserisca questa relazione e giunge alla conclusione che noi non abbiamo alcuna idea circa le proprietà intrinseche dei numeri reali, proprio come la relazione di eccentricità non può essere categorizzata come esterna o estrinseca. Ciò mostra che, nonostante siano possibili moltissime idee circa le relazioni tra i numeri reali, noi non abbiamo alcuna idea di quali siano le loro proprietà intrinseche. Questo porta a presupporre che gli oggetti portatori di tali proprietà intrinseche non esistano. Non siamo pertanto in grado di comprendere la relazione tra un insieme composto da un singolo elemento (per esempio l'insieme {0}, ma anche {{1, 2, 3}}) e i suoi membri. Chihara tenta di risolvere questi paradossi facendo appello alla nozione di struttura. Il primo problema, ad esempio, è risolto perché gli assiomi di Hilbert non fanno alcuna asserzione esistenziale. Piuttosto che essere asserzioni essi sono affini a frasi non interpretate, ovverosia frasi che sono semplicemente utili perché funzionano per caratterizzare "un tipo di struttura" (p. 45).

Secondo Van Inwagen e David Lewis (Chihara, 1998; Van Inwagen, 1986) una teoria degli insiemi è una teoria circa oggetti reali. Una volta assunto questo, deve esserci un elemento di verità se si considera che la relazione principale è una relazione specifica di un tipo specifico o di un altro ordine. A parere di Chihara questo presupposto non è corretto in quanto la teoria degli insiemi è quella teoria che, molto semplicemente, caratterizza un tipo di struttura: «The axioms tell us what (so-called) "sets" there must be in the domain of a model and also how the things in the domain must be related by this relation in order that we have a structure of the type in question. Under this way of interpreting the symbols of the language, existential quantification signifies *existence in a structure*, that is, "There is" tells us that there is something in the domain of the model such that... This is like taking the theorem of Euclidean geometry asserting 'Any triangle is such as to have angles that sum to 180 degrees' as asserting that any triangle *in* an *Euclidean structure* will be such as to have angles that sum to 180 degrees[4]» (p. 54). Di conseguenza, per comprendere la teoria degli insiemi non si deve necessariamente avere comprensione di una qualche relazione particolare. La soluzione che Chihara propone per i cinque differenti problemi lascia però in sospeso la questione circa la differenza tra "struttura" e "(un) tipo di struttura". La sua soluzione si discosta in qualche modo da quella strutturalista. Il contenuto strutturale della scrittura di una teoria matematica *T* è espressa da una frase che ha la seguente struttura: «Any model of *T* will have to be a model of ϕ 5» (p. 66). Nella scelta del titolo del libro si compendia appieno la posizione dell'Autore: egli preferisce definire il proprio esame della matematica come "a structural account of mathematics" piuttosto che parlare di "structuralism". Molte questioni rimangono tuttavia aperte: in particolare quale sia la condizione dei modelli (insiemi) le cui affermazioni che abbiano un contenuto strutturale sembrino valere come quantificatori. Per comprendere quanto detto, bisogna considerare il punto di vista di Chihara sull'argomento di Quine circa l'esistenza degli oggetti matematici esposta in *Two Dogmas of Empiricism* (Quine 1951). Quine sostiene che gli oggetti fisici possono essere considerati alla stregua degli dei di Omero, ovverosia presupposti irriducibili importati concettualmente in una data situazione in quanto intermediari convenienti, ma mai come termini di esperienza, come oggetti reali. A parere di Chihara la posizione di Quine è una sfida al nominalismo affinché venga sistematizzato l'impiego della matematica nelle scienze naturali. Si cerca di non dover necessariamente ingaggiare un impegno di tipo ontologico nei confronti degli oggetti matematici (p. 170). A parere di Chihara una teoria costruzionista è in grado di essere usata come spiegazione per l'utilizzo della matematica nelle scienze naturali, in quanto essa permette di non impegnarsi nei confronti del problema dell'esistenza degli oggetti matematici. Questa teoria riduce la matematica ad una semplice teoria dei tipi. Al posto di un insieme, la scrittura è composta

[4] "Gli assiomi ci dicono quali "insiemi" debbano essere presenti nel campo di un modello e anche come le cose in questo campo debbano essere collegate da questa relazione affinché il risultato sia una struttura del tipo in questione. Secondo questa maniera di interpretare i simboli del linguaggio, quantificazione esistenziale significa *esistenza in una struttura* . «C'è» ci dice che esiste qualcosa nel campo del modello di quel tipo... È come prendere il teorema della geometria euclidea che afferma che «ogni triangolo è tale da avere gli angoli la cui somma sia di 180 gradi» e sostenere invece che ogni triangolo *in* una *struttura euclidea* sia tale da avere la somma degli angoli di 180 gradi."

[5] "Ogni modello di *T* deve essere un modello di ϕ 5."

da frasi aperte di tipo (‘Fx’) che rendono la traduzione indeterminata. In questa maniera la pretesa esistenza degli oggetti matematici lascia il passo ad affermazioni circa la possibilità di costruire frase aperte tipo. La teoria è interessante: innanzitutto è presente nel lavoro di Chihara un interesse nei confronti dei quantificatori modali; inoltre è presente un interesse nei confronti della nozione di soddisfazione, applicabile a tutti i linguaggi reali e possibili.

Il lettore, sia egli simpatizzante nei confronti di una teoria strutturalista della matematica piuttosto che di una teoria nominalista, ha la possibilità, grazie a questo denso lavoro, di apprendere quanto siano complesse e stimolanti le problematiche di questo campo di indagini. Il testo offre al lettore specialista un tentativo di soluzione a problemi “antichi” ma presenti e ha il pregio di offrire al lettore meno esperto un ampio sguardo introduttivo sulla materia di indagine. Simpatie accademiche o meno, il lavoro di Chihara ha il pregio di sollevare e dibattere questioni di grande importanza per la filosofia.

OTTAVIA SPISNI

BIBLIOGRAFIA

Burgess J. (1983), *Why I am not a nominalist*, in *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Volume 24, Numero 1.

Burgess J., Rosen, G, (1997) *A Structure with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretations of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Chihara C. (1990), *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford University Press, Oxford.

Chihara C. (2001), *The worlds of Possibility: Modal Realism and the Semantics of Model Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Lewis D. (1991), *Parts of Classess*, Basil Blackwell, Oxford.

Quine W. O. (1968), *La relativita’ ontologica e altri saggi*

(1968), Armando, Roma, 1986.

Quine W. O. (1960), *Parola e oggetto*, Il Saggiatore, Milano, 1970.